Notas sobre Análisis Matemático para la Ingeniería

María Isabel García Planas
Profesora Titular de Universidad

Primera edición: Julio 2012
Editora: la autora

ISBN: 978-84-695-3497-7

A Blanca

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Hipatia (Alejandría 355-370)

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

Nikolay Lobachevsky (Rusia 1792-1856)

Presentación

El presente libro de apuntes es una introducción al Análisis matemático y, más concretamente al cálculo diferencial e integral de más de una variable y una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias elementales.
El libro recoge el material preparado para los estudiantes de la asignatura de Cálculo II de las titulaciones de Ingeniera industrial, química y de materiales que se imparten en la ETSEIB de la UPC. Se trata de un libro básico de esta materia.

El objetivo fundamental de estos apuntes es que el estudiante logre la capacidad suficiente en el uso de las herramientas de cálculo en dos o más variables que se presentan y en la que hace referencia a los fundamentos de ecuaciones diferenciales.

Este libro está estructurado en tres partes, de manera que la primera incluye los resultados básicos de cálculo diferencial para n variables. La segunda parte está dedicada propiamente el estudio del cálculo integral para funciones de más de una variable en particular para dos y tres variables. Finalmente la tercera parte contiene una introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden y para las ecuaciones y sistemas lineales de orden n.

La Autora

Índice general

PARTE I

Capítulo 1

Continuidad de funciones de n variables

1.1. Preliminares

En primer lugar debemos introducir unos conceptos topológicos que son necesarios para poder realizar el estudio de las funciones de n variables.

Definición 1.1.1. En $\mathbb{R}^n$ sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto.

1. Un disco abierto de centro $(a_1, \ldots, a_n)$ y radio r >0 es:

$$D_r(a) = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

2. Un disco cerrado de centro $(a_1, \ldots, a_n)$ y radio r >0 es:

$$\bar{D}_r(a) = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$$

3. Un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ del punto a es un conjunto que contiene un disco abierto $D_r(a)$ que contiene a a, $a \in D_r(a) \subset U$.

4. Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es punto interior de A si existe un disco $D_r(a)$ centrado en el punto y contenido en el conjunto: $D_r(a) \subset A$.

   Denotaremos por $\mathring{A}$ al conjunto de puntos interiores de A.

5. Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es punto exterior de A si existe un disco $D_r(a)$ centrado en el punto y contenido en el conjunto complementario $A^c = \mathbb{R}^n - A$ de A: $D_r(a) \subset A^c$.

   Denotaremos por $Ext\, A$ al conjunto de puntos exteriores de A.

6. Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente de A si todo disco $D_r(a)$ centrado en dicho punto corta al conjunto: para todo $r > 0$, $D_r(a) \cap A \neq \emptyset$.

   Denotaremos por $\bar{A}$ al conjunto de puntos adherentes a A.

7. Se dice que un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es punto frontera de A si en todo disco $D_r(a)$ centrado en el punto hay puntos de A y puntos que no son de A: Para todo $r > 0$, $D_r(a) \cap A \neq \emptyset$ y $D_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$.

   Denotaremos por $\mathcal{F}A$ al conjunto de todos los puntos frontera de A.

8. Un conjunto se dice abierto si todos sus puntos son interiores: $A = \mathring{A}$.

9. Un conjunto se dice cerrado si contiene a todos sus puntos adherentes: $A = \bar{A}$.

10. Un conjunto se dice acotado si está contenido en un entorno del origen de radio suficientemente grande: $A \subset D_r(0)$.

11. Un conjunto se dice compacto si es cerrado y acotado: $A = \bar{A} \subset D_r(0)$.

Observación 1.1.1. Los discos $D_r(a)$ también se denominan bolas $B(a, r)$.

Ejemplo 1.1.1. 1. El conjunto $A = \{(x, y) \mid -1 < x, y < 1\}$ es un conjunto abierto.

2. El conjunto $C = \{(x, y) \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$ es un conjunto cerrado.

3. El conjunto $F = \{(x, y) \mid -1 = x, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid 1 = x, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid -1 = y, -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid 1 = y, -1 \leq x \leq 1\}$ es la frontera de A.

4. El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \leq 2x\}$ es compacto. Es claro que es un conjunto cerrado y que dicho conjunto está contenido en la bola de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$.

1.2. Funciones escalares de n variables

Se llama función real (o escalar) de n variables reales a cualquier función

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$.
El conjunto D se llama dominio, y el conjunto de todos los valores que toma la función se llama imagen, recorrido o rango.

Ejemplo 1.2.1. 1. $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, la función está definida para cualquier par de valores reales (x, y). Por tanto, $D = \mathbb{R}^2$.

2. $g(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, la función está definida para cualquier par de valores reales (x, y) tal que $x - y \neq 0$. Luego el dominio está formado por todos los puntos del plano xy excepto los que están sobre la recta $y = x$.

3. $h(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, la función está definida para cualquier par de valores reales (x, y) tales que $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, equivalentemente $4 \geq x^2 + y^2$. Luego el dominio es todo los puntos del plano que están en el círculo de radio 2 y centro el origen de coordenadas, es decir, $D = \overline{B}_2(0, 0)$ la bola cerrada de centro $(0, 0)$ y radio 2.

Las variables independientes pueden ser vistas como funciones, identificándolas con las proyecciones sobre los ejes coordenados.
La función coordenada i-ésima, $1 \leq i \leq n$, en $\mathbb{R}^n$ se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longrightarrow a_i. \end{aligned}$$

1.3. Representación gráfica, Curvas de nivel

La gráfica de una función de dos variables $z = f(x, y)$, es la representación 3D (a partir de unos ejes cartesianos x, y, z) de todas las combinaciones posibles de valores $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$. Es decir, para cada par de valores (x, y) del dominio de definición de la función encontraremos la imagen z a través de la función f. Los tres valores definen un punto en el espacio de tres dimensiones. El conjunto de todos estos puntos nos da la gráfica de la función.

Dada una función f de n variables $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y un número real cualquiera c, se define la curva de nivel de la función f asociada a este valor c de z como el conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que verifican $f(x) = c$. Si denotamos esta curva de nivel como C_c tenemos

$$C_c = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f(x) = c\}$$

Para el caso particular de una función de dos variables $z = f(x, y)$, podemos representar las curvas de nivel en dos dimensiones. La representación coincidirá con el perfil que resulta de seccionar horizontalmente la gráfica de la función a un nivel (o altura) de valor $z = c$. El conjunto de curvas de nivel se llama mapa de curvas de nivel.

Ejemplo 1.3.1. Sea la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Tomando $c > 0$, la curva de nivel correspondiente a $f(x, y) = c$ es la circunferencia $x^2+y^2 = c$ y tomando $c = 0$ la curva de nivel corresponde a la descrita por los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 0$ (que corresponde únicamente al punto $(0, 0)$). Obviamente para $c < 0$ no hay curva de nivel.

1.4. Operaciones con funciones

Si f y g son funciones reales de n variables con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, definimos las siguientes operaciones:

1. Suma: $(f + g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$.

2. Producto: $(f \cdot g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$.

3. Cociente: si $g(x) \neq 0$, $(f/g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)/g(x_1, \ldots, x_n)$.

Observación 1.4.1. Si los dominios de definición D_1 y D_2 de f y g respectivamente son distintos entonces el dominio de definición de $f + g$ y $f \cdot g$ es $D = D_1 \cap D_2$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, si el recorrido de f está incluido en el dominio de g definimos la composición $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma $g \circ f(x_1, \ldots, x_n) = g(f(x_1, \ldots, x_n))$.

1.5. Funciones vectoriales de n variables

Generalizamos las funciones consideradas al caso en que a partir de n entradas se determinan m salidas, representadas por un vector de $\mathbb{R}^m$, o bien $p \times q$ salidas, representadas por una matriz de $M_{p\times q}(\mathbb{R})$.
Llamaremos función m-vectorial, de n variables y con dominio de definición D, a una función de la forma

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & (a_1, \dots, a_m). \end{array}$$

Con esta definición observamos que tenemos definidas m funciones reales $f_i(x_1, \dots, x_n) = a_i$. A dichas funciones las llamaremos las funciones componentes de f, esto es $f = (f_1, \dots, f_m)$.
Es fácil observar que el dominio de definición de la función vectorial f es la intersección de los dominios de definición de sus funciones componentes.
Análogamente definimos las funciones matriciales: llamaremos función $p \times q$-matricial, de n variables y con dominio de definición D, a una función de la forma

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & M_{p\times q}(\mathbb{R}), \quad D \subset \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}. \end{array}$$

En este caso tenemos definidas $p \times q$ funciones reales $f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = a_{ij}$. A dichas funciones las llamaremos las funciones componentes de f, esto es $f = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1} & \dots & f_{pq} \end{pmatrix}$.
También en este caso, el dominio de definición de la función vectorial f es la intersección de los dominios de definición de sus funciones componentes.
En realidad una función matricial la podemos ver como una función vectorial a valores $\mathbb{R}^{pq}$: $f = (f_{11}, \dots, f_{1q}, \dots, f_{p1}, \dots, f_{pq})$.

Operaciones con funciones vectoriales
Se extienden de forma natural la operación suma y la composición:

1. Suma: $(f_1, \dots, f_n) + (g_1, \dots, g_n) = (f_1 + g_1, \dots, f_n + g_n)$

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, si el recorrido de f está incluido en el dominio de g definimos la composición $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de la forma $g \circ f(x_1, \ldots, x_n) = g(f(x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 1.5.1. Consideremos las funciones:

$$
\begin{aligned}
&f(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta},\\
&g(x, y, z) = (z^2 - xy - y^2, z^2 - xy - x^2),\\
&h(u, v) = (u, v, u + v).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F(u, v) = (f \circ g \circ h)(u, v) = (f \circ g)(h(u, v)) = (f \circ g)(u, v, u + v) =\\
&f(g(u, v, u + v)) = f(u^2 + uv, v^2 + uv) = \frac{(u + v)^2}{u^2 - v^2}.
\end{aligned}
$$

1.6. Continuidad

Definición 1.6.1. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es continua en $x_0 \in D$ si dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $d(x_0, x) < \delta(\varepsilon)$ entonces $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ o, equivalentemente: para todo $x \in B(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset D$ se tiene que $f(x) \in B((f(x_0), \varepsilon)$.

Ejemplo 1.6.1. Sea $f(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$. Esta función es continua en el origen ya que dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$, tenemos que si $\|(x, y)\| \leq \delta$ entonces $\|f(x, y) - f(0, 0)\| \leq \varepsilon$.
Más concretamente:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} - 1\right| = \frac{2(x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2} \leq \varepsilon\\
&1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\\
&\frac{2 - \varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\\
&1 + x^2 + y^2 \leq \frac{2}{2 - \varepsilon}\\
&x^2 + y^2 \leq \frac{2}{2 - \varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}\\
&\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}} = \delta.
\end{aligned}
$$

Diremos que f es continua en D si lo es en todo $x_0 \in D$. Al conjunto de funciones continuas en D lo designamos per $C^0(D)$.
Es fácil demostrar que una función $f = (f_1, \dots, f_m)$ es continua si y sólo si lo es cada una de las funciones componentes f_i.

Ejemplo 1.6.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida de la forma

$$f(x,y) = (\operatorname{sen} \frac{x}{x^2+y^2+1}, e^{-\frac{1}{x^2+y^2+1}}).$$

Es claro que las funciones $f_1(x,y) = \operatorname{sen} \frac{x}{x^2+y^2+1}$ y $f_2 = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+1}}$ son continuas, luego f es continua.

1.7. Límite

Llamaremos límite de una función f en un punto, al valor que debería tomar para que fuera continua en este punto. No es necesario pues, que la función esté definida en este punto previamente.
Más concretamente,

Definición 1.7.1. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que ℓ es el límite de f en x_0, y escribiremos

$$\ell = \lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

o también

$$f(x) \to \ell \quad \text{cuando} \quad x \to x_0$$

si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ que:

$$d(f(x), \ell) < \varepsilon, \text{ siempre que } d(x, x_0) < \delta(\varepsilon), x \in D, x \neq x_0$$

o equivalentemente

$$f(x) \in B(\ell, \varepsilon) \text{ siempre que } x \in (B(x_0, \delta(\varepsilon)) - x_0) \cap D.$$

Ejemplo 1.7.1.

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2} &= \lim\nolimits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \lim\nolimits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)}{x+y} \\ &= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Proposición 1.7.1. *El límite de una función f en un punto, en caso de que exista es único.*

Comparando las definiciones de continuidad y de límite obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.7.2. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in D$, entonces f es continua en x_0 si y sólo si*

$$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Lo que nos proporciona una forma de estudiar la continuidad en un punto.

No siempre es fácil hallar el límite de una función en un punto, por lo que damos a continuación, condiciones necesarias para la existencia de límite dando el valor del posible límite en caso de que este exista.

Definición 1.7.2. Dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, un subconjunto $D_1 \subset D$ y un punto $x_0 \in \bar{D}_1$ ($\bar{D}_1$ es la adherencia de D_1). Se define el límite según el subconjunto D_1 de f en x_0 (si existe) como el límite de la función $f_{|D_1}$, restrición de f a D_1

$$\lim_{x_0, D_1} f = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_1}} f(x) = \lim_{x_0} f_{|D_1}.$$

Claramente, una condición necesaria para que exista $\lim_{x_0} f$ es que existan y coincidan todos los límites según todos los subconjuntos:

$$\lim_{x_0} f = \ell \text{ entonces } \lim_{x_0} f_{|D_1} = \ell, \ \forall D_1 \subset D$$

El recíproco no es cierto en general pero tenemos el siguiente resultado
Si $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ y

$$\lim_{x_0} f_{|D_1} = \ldots = \lim_{x_0} f_{|D_r} = \ell, \text{ entonces } \lim_{x_0} f = \ell$$

Este resultado no es cierto si el número de subespacios D_i no es finito.

Ejemplo 1.7.2. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y^2}$. El dominio de definición de la función es $D = \mathbb{R} - \{y = 0\}$.

$D = \cup_{m\neq 0}\{y = mx, x \neq 0\}$,
$\text{lím}_{x\to 0} f(x, mx) = \text{lím}_{x\to 0} \dfrac{x^3}{m^2x^2} = \text{lím}_{x\to 0} \dfrac{x}{m^2} = 0.$
Sin embargo en $D_1 = \{y = x^2, x \neq 0\} \subset D$ se tiene:
$\text{lím}_{x\to 0} f(x, x^2) = \text{lím}_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^4} = \text{lím}_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$

El estudio de la continuidad y de los límites de una función vectorial (o matricial) se puede reducir al de sus funciones componentes.

Proposición 1.7.3. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ (o $f = \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1} & \ldots & f_{pq} \end{pmatrix}$).*

1. *f es continua en $x_0 \in D$ si y sólo si, lo son $f_1, \ldots, f_m$) (o lo son $f_{11}, \ldots, f_{1p}, \ldots, f_{p1}, \ldots, f_{pq}$).*
2. *Si $x_0 \in \bar{D}$ y $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$, (o $\ell = (\ell_{11}, \ldots, \ell_{1q}, \ldots, \ell_{p1}, \ldots, \ell_{pq})$ entonces*

$$\lim_{x_0} f = \ell \text{ si y sólo si, } \lim_{x_0} f_1 = \ell_1, \ldots, \lim_{x_0} f_m = \ell_m,$$
$$(\text{o } \lim_{x_0} f_{11} = \ell_{11}, \ldots, \lim_{x_0} f_{1q} = \ell_{1q}, \ldots, \lim_{x_0} f_{p1} = \ell_{p1}, \ldots \lim_{x_0} f_{pq} = \ell_{pq}).$$

Proposición 1.7.4. *1. Sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $\text{lím}_{x_0} f = y_0$, $\text{lím}_{x_0} g = z_0$, entonces $\text{lím}_{x_0}(f + g) = y_0 + z_0$ y $\text{lím}_{x_0}(\lambda f) = \lambda y_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{lím}_{x_0}(fg) = y_0 z_0$.*

2. *Si además $g(x_0) \neq 0$ también se tiene $\text{lím}_{x_0} f/g = y_0/z_0$.*

3 *Si $\text{lím}_{x_0} f = y_0 \in D_1$, y h es continua en y_0, entonces $\text{lím}_{x_0}(h \circ f) = h(\text{lím}_{x_0} f) = h(y_0)$.*

Observación 1.7.1. Las hipótesis de la proposición son suficientes pero no necesarias, es decir podemos tener dos funciones que no tienen límite en un punto y cuya suma sí lo sea, así por ejemplo si $g = -f$, $f + g = 0$ que tiene límite en todos sus puntos independientemente de que lo sea o no la función f (y por tanto g).

1.7.1. Límites reiterados

Se denominan límites reiterados a los que resultan de considerar sucesivamente las funciones parciales respecto a las distintas variables:

Definición 1.7.3. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in D$.

1. Para $n = 2$, se denominan límites reiterados en $x_0 = (a_1, a_2)$ a

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \to a_1} \lim_{x_2 \to a_2} f &= \lim_{x_1 \to a_1} (\lim_{x_2 \to a_2} f) \\ \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f &= \lim_{x_2 \to a_2} (\lim_{x_1 \to a_1} f). \end{aligned}$$

2. Análogamente para $n > 2$

$$\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} \lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} \dots \lim_{x_{i_n} \to a_{i_n}} f = \lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} (\lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} (\dots \lim_{x_{i_n} \to a_{i_n}} f))$$

   para cada permutación $(i_1, \dots, i_n)$ de $(1, \dots, n)$.

Como en la proposición anterior, se demuestra fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 1.7.5. *En las condiciones anteriores, si* $\lim_{x_0} f = \ell$*, entonces los límites reiterados si existen también valen* ℓ*.*

Observación 1.7.2.

1. Es posible que exista el límite de la función en un punto pero que no existan los límites reiterados.

2. Para evitar confusiones, en este contexto al $\lim_{x_0} f$ lo denominamos límite doble, para remarcar la diferencia respecto a los límites reiterados.

3. La existencia de los límites reiterados aunque coincidan, no implica la existencia de límite.

4. Es un criterio para detectar el valor del límite debido a su unicidad en caso de existencia, o para demostrar que no existe límite de la función en caso de que los reiterados sean distintos. El hecho de que no existan los reiterados no da información sobre la función

Ejemplo 1.7.3. 1. Sea $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

$$\begin{array}{l} \text{lím}_{y\to 0}\,\text{lím}_{x\to 0}\, f(x,y) = \text{lím}_{y\to 0}\left(-\dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2}\right) = -1 \\ \text{lím}_{x\to 0}\,\text{lím}_{y\to 0}\, f(x,y) = \text{lím}_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) = 1 \end{array}$$

Puesto que los límites reiterados son distintos podemos concluir que no existe el límite de la función en el origen.

2. Sea $f(x,y) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$, $\forall y \neq 0$ y $f(x,0) = 0$.

$$\begin{array}{l} \text{lím}_{y\to 0}\,\text{lím}_{x\to 0}\, f = \text{lím}_{y\to 0}\, 0 = 0 \\ \text{lím}_{x\to 0}\,\text{lím}_{y\to 0}\, f \text{ no existe, (sólo existe para } x = 0), \end{array}$$

Sin embargo $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$ ya que $\left| x \operatorname{sen}\frac{1}{y} - 0 \right| = |x| \left| \operatorname{sen}\frac{1}{y} \right| \leq |x|$ y $\text{lím}_{x\to 0} |x| = 0$.

1.8. Propiedades de las funciones continuas

Proposición 1.8.1. *1. Sea A un conjunto abierto. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en el punto $x_0 \in A$, entonces también lo son a) λf, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, b) $f + g$, c) $f \cdot g$, d) f/g si $g(x_0) \neq 0$.*

2. Sean A y B conjuntos abiertos. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$ son funciones continuas en $x_0 \in A$ y $f(x_0) \in B$ respectivamente, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

3. Sea A es un conjunto abierto. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en el punto $x_0 \in A$ y si existe $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces f^{-1} es continua en $f(x_0)$, (continuidad de la inversa).

Esta proposición permite concluir que las funciones obtenidas combinando mediante suma, producto, composición,... de funciones continuas son también continuas en el dominio de definición de la función. Este hecho lo denominaremos “continuidad por generación”.

Ejemplo 1.8.1. Sea $f(x,y) = \cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$. La función f está bien definida en todo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $(x^2+y^2 \neq 0, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ y es continua por generación en todo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ($f_1 = \cos x,\ f_2 = x - y,\ f_3 = x^2 + y^2$ son continuas, $f_3 \neq 0,\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ y $f = f_1 \circ f_2/f_3$).

Designaremos por $C^0(A)$ al conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre el conjunto abierto A.

Capítulo 2

Derivación de funciones de n variables

Dada una función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ recordemos que se define la derivada de dicha función como
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$
Dicha definición se puede generalizar a una función
$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
de la manera
$$f'(x_0) = ({f'}_1, \ldots, {f'}_n).$$
Geométricamente observamos que $f(x)$ es la parametrización de una curva en $\mathbb{R}^n$ y $f'(x_0)$ nos proporciona el vector tangente a la curva en dicho punto.

2.1. Derivadas parciales

La definición de derivada de una función de una variable no puede extenderse directamente a funciones de n variables ya que el cociente de vectores no tiene sentido.
Podemos intentar extender la noción geométrica de derivada, una primera forma de hacerlo es vía las derivadas parciales. Con ello se pretende medir la velocidad de variación de una función cuando nos movemos en direcciones paralelas a los ejes coordenados.

Definición 2.1.1. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el abierto A de $\mathbb{R}^n$ y un punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, se define la derivada parcial i-ésima de la función f como el límite en caso de que exista, siguiente.

$$D_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}.$$

Otras notaciones comúnmente utilizadas (y que usaremos indistintamente) son $\partial_{x_i} f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $f'_{x_i}(a)$.

Observación 2.1.1. Esta definición coincide con la derivada de la función $f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$ que resulta de considerar como única variable la i-ésima y las demás constantes.

Ejemplo 2.1.1.

1. Sea $f(x, y) = xy$, entonces $D_1 f(x) = y$, $D_1 f(y) = x$.
2. Sea $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Las derivadas parciales en el origen son:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Cálculo de derivadas parciales

La definición de derivada parcial sólo se utiliza cuando en el punto en el cual calculamos la derivada, presenta algún tipo de indeterminación. En el resto de puntos, teniendo en cuenta que la derivada parcial i-ésima en el punto $x_0 = (x_{0_1}, \ldots, x_{0_n})$ es

$$D_i f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_n}) = \frac{d}{dx_i} f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{i-1}}, x_i, x_{0_{i+1}}, \ldots, x_{0_n})_{|x_i = x_{0_i}},$$

podemos usar las reglas de derivación de funciones de una variable.

Ejemplo 2.1.2. Sea $f(x, y) = xe^y$,

$$D_1 f(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}_{x = x_0} f(x, y_0) = \frac{d}{dx}_{x = x_0} xe^{y_0} = e^{y_0},$$
$$D_2 f(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}_{y = y_0} f(x_0, y) = \frac{d}{dy}_{y = y_0} x_0 e^y = x_0 e^{y_0}.$$

Propiedades

A diferencia de las funciones de una variable en que la derivada en un punto nos permite aproximar la función por una variedad lineal (recta tangente) en el entorno de este punto, la existencia de derivadas parciales no siempre da información sobre el comportamiento local de la función.
Así por ejemplo, la existencia de derivadas parciales no implica la continuidad de la función.
Ejemplo 2.1.3. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.
Las derivadas parciales en el origen valen

$$\begin{aligned}
&\text{lím}_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \text{lím}_{t\to 0} 0 = 0, \\
&\text{lím}_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \text{lím}_{t\to 0} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Sin embargo puesto que los límites direccionales son distintos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 m}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2},$$

la función no es continua en el origen.

Ahora bien,

Proposición 2.1.1. *Si las derivadas parciales son continuas entonces la función es continua.*

Ejemplo 2.1.4. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = (0,0)$.
Las derivadas parciales en todo punto $(x,y) \neq 0$ se obtienen por generación:

$$\begin{aligned}
D_1 f(x,y) &= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \\
D_2 f(x,y) &= \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

En el origen

$$\begin{aligned}
&\text{lím}_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = D_1 f(0,0), \\
&\text{lím}_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = D_2 f(0,0).
\end{aligned}$$

Estudiemos la continuidad de las funciones derivadas parciales, para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ las funciones son continuas por generación.
Respecto la continuidad en el origen no podemos usar criterios de generación por lo que aplicamos la definición.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^5\cos\theta\,\mathrm{sen}^4\,\theta}{r^4} = 0,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_2 f = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^5\cos^4\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^4} = 0.$$

Concluimos que las funciones derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo tanto la función es continua en $\mathbb{R}^2$

El recíproco no es cierto, es decir si una función continua admite derivadas parciales éstas no son necesariamente continuas

Ejemplo 2.1.5. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = (0,0)$.
Las derivadas parciales en todo punto $(x,y) \neq 0$ se obtienen por generación:

$$D_1 f(x,y) = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$D_2 f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

En el origen

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = D_1 f(0,0),$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = D_2 f(0,0).$$

Estudiemos la continuidad de las funciones derivadas parciales, para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ las funciones son continuas por generación.
Respecto la continuidad en el origen no podemos usar criterios de generación, aplicamos pues, la definición.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\mathrm{sen}^4\,\theta - \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta)}{r^4}$$

no existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^4}$$

no existe.

Sin embargo vamos a probar que la función es continua. En todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(x, y)\}$ la función es continua por generación y en el punto cero tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x.y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = 0.$$

Luego la función también es continua en el origen.

Observación 2.1.2. La continuidad de la función no asegura la existencia de derivadas parciales, como podemos ver en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.1.6. Sea $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que es continua en todo $\mathbb{R}^2$ por generación. Admite derivadas parciales en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Sin embargo, en el origen tenemos

$$\begin{array}{l} \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{|t|}{t} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \ t > 0 \\ -1 \ t < 0 \end{array} \right. \\ \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{|t|}{t} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \ t > 0 \\ -1 \ t < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

por lo que no existen las derivadas parciales de la función en el origen.

Al conjunto de funciones escalares definidas sobre el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que admiten derivadas parciales continuas diremos que son de clase C^1, y lo designaremos por $C^1(A)$.
Por la proposición anterior tenemos que $C^0(A) \subset C^1(A)$.

Derivadas parciales para funciones vectoriales

Análogamente, dada una función $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos la derivada parcial primera i-ésima de la función f en un punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, a

$$(D_i f_1(a), \ldots, D_i f_m(a))$$

con $D_i f_j(a)$ la derivada parcial i-ésima de la función componente f_j. Es decir $D_i f_j(a)$ es el límite en caso de que exista, siguiente.

$$D_i f_j(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}.$$

Observación 2.1.3. Para cada f_j, la definición coincide con la derivada de la función $f_j(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$ que resulta de considerar como única variable la i-ésima y las demás constantes.

Matriz jacobiana

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y supongamos que en el punto a existen todas las derivadas parciales de todas las funciones componentes.
Definimos la matriz jacobiana de f en el punto a de la forma

$$Df(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1.7.

a) Sea $f(x,y) = (\frac{x^2}{y}, \operatorname{sen}(2x+y))$, la matriz jacobiana en un punto (x,y) cualquiera del dominio de definición es

$$\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 2\cos(2x+y) & \cos(2x+y) \end{pmatrix}.$$

b) Sea $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, la matriz jacobiana en un punto (x,y) cualquiera del dominio de definición es

$$Df(a) = \begin{pmatrix} e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana en el punto a juega el mismo papel geométrico que la derivada de una función de una variable en vistas a la aproximación de la función por una función lineal en el entorno del punto a.

2.2. Aproximación lineal de una función de n variables

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, las derivadas parciales en un punto (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

nos proporcionan una buena aproximación del incremento de la función cuando se pasa del punto (x_0, y_0) a un punto de la forma $(x_0 + h; y_0)$ o $(x_0, y_0 + h)$, respectivamente. Para tener una buena aproximación del incremento $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$ se nos ocurre calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2.$$

O más en general en una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de n variables, se nos ocurre aproximar $f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$ de la manera

$$D_1 f(x_1, \ldots, x_n)h_1 + \ldots + D_n f(x_1, \ldots, x_n)h_n.$$

Por lo que introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}^n$, decimos que es diferenciable en un punto $a \in A$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - df_a(h)|}{\|h\|} = 0$$

donde df_a es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ respectivamente tiene por matriz la matriz jacobiana definida en (2.1).
Por lo que podemos escribirlo de la manera

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - (h_1 D_1 f(a) + \ldots + h_n D_n f(a))|}{\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}} = 0.$$

Ejemplo 2.2.1. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = (0, 0)$. Según el ejemplo 2.1.4 la matriz jacobiana en el origen es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Luego la función es diferenciable en el origen.

La diferenciabilidad de la función nos dice que la función lineal n-dimensional

$$T(x) = f(a) + Df(a)(x - a), \tag{2.2}$$

es una aproximación de la función en un entorno suficientemente pequeño de a y escribiremos

$$f(x) \simeq f(a) + Df(a)(x - a) \text{ cuando } \ x \to a$$

Observación 2.2.1. Si $n = 2$ y llamamos $T(x, y) = z$, observamos que (2.2) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$, es el plano tangente a la superficie $(x, y, f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ en el punto $(a, f(a))$.
En general si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y llamamos $T(x) = x_{n+1}$, (2.2) es la ecuación de una variedad lineal (hiperplano) en $\mathbb{R}^{n+1}$ y es el hiperplano tangente a la hipersuperficie $(x, f(x))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(a, f(a))$.

Ejemplo 2.2.2. Sea $f(x, y) = e^{x+y}$, entonces y puesto que $D_1 f(0) = 1$ y $D_2 f(0) = 1$ y la función es diferenciable tenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &\simeq f(0,0) + Df(a)((x,y) - (0,0)) \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x + y \quad \text{cuando } (x,y) \to (0,0). \end{aligned}$$

El plano tangente a la superficie (x, y, e^{x+y}) en el punto $(0, 0, 1)$ es $z = 1 + x + y$.

Condiciones de diferenciabilidad

En el ejemplo 2.1.4 hemos visto que la función $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ admite derivadas parciales en el origen y en el ejemplo 2.2.1 hemos probado que f es diferenciable en el origen. De hecho tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Si una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciales en un punto y estas son continuas en dicho punto, entonces la función es diferenciable en dicho punto.*

El recíproco es falso, es decir una función puede ser diferenciable en un punto y sin embargo las derivadas parciales no necesariamente ser continuas en dicho punto.
Pero para que la función sea diferenciable en un punto esta ha de ser necesariamente continua en dicho punto.

Ejemplo 2.2.3. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.
La función es continua en el origen ya que

$$|(x^2+y^2)\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq x^2+y^2 \to 0.$$

Existen las derivadas parciales en el origen:

$$D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{\sqrt{t^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} t \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{|t|} = 0,$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{\sqrt{t^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} t \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{|t|} = 0.$$

La función es diferenciable en el origen ya que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Sin embargo, vamos a ver que las derivadas parciales no son continuas en el origen.

$$D_1f(x,y) = 2x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$D_2f(x,y) = 2y\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Si calculamos el límite de estas funciones $D_1 f(x,y)$, y $D_2 f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ y haciendo el cambio a polares obtenemos

$$\text{lím}_{r\to 0} 2r\cos\theta \operatorname{sen}\frac{1}{r} - \cos\theta\cos\frac{1}{r},$$

$$\text{lím}_{r\to 0} 2r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{1}{r} - \operatorname{sen}\theta\cos\frac{1}{r},$$

que claramente no existen.

Observación 2.2.2. Una función puede ser continua, admitir derivadas parciales y no ser diferenciable como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.4. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.
La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, y admite derivadas parciales en el origen $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$. Sin embargo

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

no existe.

Definición 2.2.2. Una función es diferenciable en un dominio abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ si es diferenciable en cada uno de los puntos de A.

Si denotamos por $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de funciones diferenciables en A, tenemos $C^1(A) \subset \mathcal{D}(A) \subset C^0(A)$.

2.3. Derivadas parciales de orden superior. Funciones de clase C^r

De forma natural se pueden definir las derivadas segundas, terceras, etc.

Definición 2.3.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si f es derivable, y sus funciones derivadas parciales también, se definen las derivadas parciales segundas de f mediante:

$$D_{ij} f(a) = D_j(D_i f)(a), a \in A, 1 \leq i,j \leq n,$$

que podemos también escribir como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Análogamente, se definen las derivadas de orden superior:

$$D_{ijk}f(a) = D_k(D_{ij}f)(a), \text{ etc.}$$

que también se escribe como

$$\frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(a).$$

Ejemplo 2.3.1. Sea $f(x,y) = x^2 + 2e^y$. Entonces

$$\begin{array}{ll} D_1 f(x,y) & = 2x \\ D_2 f(x,y) & = 2e^y \end{array}, \quad \begin{array}{ll} D_{11} f(x,y) & = 2 \\ D_{12} f(x,y) & = 0 \\ D_{21} f(x,y) & = 0 \\ D_{22} f(x,y) & = 2e^y \end{array}, \quad \begin{array}{ll} D_{111} f(x,y) & = 2 \\ D_{112} f(x,y) & = 0 \\ D_{121} f(x,y) & = 0 \\ D_{122} f(x,y) & = 0 \\ D_{211} f(x,y) & = 0 \\ D_{212} f(x,y) & = 0 \\ D_{221} f(x,y) & = 0 \\ D_{222} f(x,y) & = 2e^y \end{array}, \quad \ldots.$$

Observación 2.3.1. En principio $D_{ij}(a) \neq D_{ji}(a)$.

Se denota per $C^2(A), C^3(A), \ldots$ las funciones que admiten derivadas hasta los órdenes $2, 3, \ldots$, todas ellas continuas, en A. Denotamos por $C^\infty(A)$ las funciones que tienen derivadas de cualquier orden, todas ellas continuas, en A y a estas funciones las denominamos funciones lisas.

Proposición 2.3.1. *Las funciones elementales es decir polinomios, exponenciales, trigonométricas y sus composiciones son funciones de clase C^∞ en sus dominios de definición.*

Proposición 2.3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(A)$, entonces*

$$D_{ij}f = D_{ji}F.$$

o en una de las otras notaciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

De hecho para que se verifique esta igualdad basta con exigir que $f \in C^1(A)$, que existan las derivadas parciales segundas en todos los puntos de un disco $D_r(a) \subset A$ y que al menos una de las derivadas cruzadas sea continua en a. Pero es importante observar que no se puede prescindir completamente de la continuidad de las parciales,.

Ejemplo 2.3.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la manera $f(x,y) = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = (0,0)$

$$D_1f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
$$D_2f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-y^4)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$D_{12}f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
$$D_{21}f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Observamos que $D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y)$ para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ pero $D_{12}f(0,0) \neq D_{21}f(0,0)$.

Más en general, sea $f \in C^k(A)$ entonces las derivadas parciales de orden $\leq k$ que involucran a las mismas variables coinciden.

Ejemplo 2.3.3. Sea $f(x,y,z) = x^3y^2z$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2yz,\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 3x^2y^2,\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial x} = 6xy^2,\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial f^4}{\partial x \partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial f^4}{\partial x \partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial f^4}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \ldots = 12xy,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Observación 2.3.2. $\dfrac{\partial f^4}{\partial x \partial x \partial y \partial z}$ se puede escribir de manera más compacta de la forma $\dfrac{\partial f^4}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, así como $\dfrac{\partial f^4}{\partial y \partial x \partial x \partial z}$ se puede escribir $\dfrac{\partial f^4}{\partial y \partial x^2 \partial z}$, etc. Es decir agrupamos las variables repetidas consecutivas, y en el caso de estar en condiciones de asegurar la igualdad de derivadas cruzadas podemos directamente agrupar todas las variables repetidas usando esta notación más compacta.

2.4. Regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de 2 variables diferenciable donde x e y son funciones reales de variable real $x(t)$, $y(t)$ también diferenciables. Entonces la función $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $z(t) = f(x(t), y(t))$ es una función de t diferenciable cuya diferencial es

$$dz(t) = D_1 f dx + D_2 f dy = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Más en general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.1 (Regla de la cadena)**.** *Sea* $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función de clase* $C^1(A)$ *definida sobre el conjunto abierto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $g = (g_1, \ldots, g_p) : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *una función de clase* $C^1(B)$ *definida sobre el* *conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}^m$. Sea $x_0 \in A$ un punto tal que $f(x_0) \in B$. Entonces la diferencial de la composición $g \circ f = ((g \circ f)_1, \dots (g \circ f)_p)$ en el punto $x_0 \in A$ es:*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0) \cdot Df(x_0)$$

que expresado de forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} D_1(g \circ f)_1(x_0) & \dots & D_n(g \circ f)_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1(g \circ f)_p(x_0) & \dots & D_n(g \circ f)_p(x_0) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} D_1 g_1(f(x_0)) & \dots & D_m g_1(f(x_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p(f(x_0)) & \dots & D_m g_p(f(x_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.4.1. Sean $f(x, y, z) = (x+y+z, e^{x+y}, \operatorname{sen} x)$ y $g(u, v, w) = u+v+w$ dos funciones diferenciables. Calcularemos la diferencial de $g \circ f$ en el punto $(0, 0, 0)$, calculando previamente las diferenciales de f en $(0, 0, 0)$ y de g $f(0, 0, 0) = (0, 1, 0)$,

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Dg(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$D(g \circ f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En un punto cualquiera (x, y, z) sería

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{x+y} & e^{x+y} & 0 \\ \cos x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + e^{x+y} + \cos x & 1 + e^{x+y} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como puede comprobarse directamente haciendo la composición de la función

$$(g \circ f)(x,y,z) = g(x+y+z, e^{x+y}, \operatorname{sen} x) = x + y + z + e^{x+y} + \operatorname{sen} x,$$

y calculando la diferencial.

La notación utilizada al inicio de este apartado suele ser la más usada, así el ejemplo anterior queda de la siguiente manera:
llamando $f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ y si llamamos $h = g \circ f$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 2.4.2. Sea $g(u,v) = u^2 v$ con $u(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ y $v(x,y) = xy$, entonces la diferencial de la función $h(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2uv\cos(x+y) + u^2 y, \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2uv\cos(x+y) + u^2 x.
\end{aligned}$$

2.5. Derivadas direccionales

Como se ha comentado previamente, las derivadas parciales miden la velocidad de variación de una función cuando nos movemos en direcciones paralelas a los ejes coordenados. Este concepto es fácilmente extendible a cualquier dirección

Definición 2.5.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

1. Si $a \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$, se define la derivada según la dirección v de f en el punto a mediante el límite si existe, siguiente.

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

2. En el caso particular en que los vectores v sean tales que $\|v\| = 1$, entonces las derivadas según estas direcciones reciben el nombre de derivadas direccionales.

Es fácil probar la siguiente proposición.

Proposición 2.5.1.
$$D_{\lambda v} f(a) = \lambda D_v f(a)$$
para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $\lambda = 0$ entonces $D_0 f(a) = \text{lím}_{t\to 0} \dfrac{f(a+t0) - f(a)}{t} = 0$.
Sea $\lambda \neq 0$

$$D_{\lambda v} f(a) = \text{lím}_{t\to 0} \frac{f(a+t\lambda v) - f(a)}{t} = \text{lím}_{t\to 0} \frac{\lambda(f(a+t\lambda v) - f(a))}{\lambda t} =$$
$$\lambda\, \text{lím}_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lambda D_v f(a).$$

□

Como consecuencia de esta proposición tenemos que es suficiente considerar las derivadas direccionales. Observamos también que dependen del sentido del vector unitario que la genera, cosa que a la práctica no comporta confusiones. Geométricamente la derivada direccional nos proporciona la pendiente de la tangente en el punto a a la curva contenida en el gráfico de f, determinada por las imágenes de los puntos que obtenemos al recorrer la recta que pasa por a con la dirección determinada por v contenida en el abierto A.

Observación 2.5.1. La definición de derivada direccional se generaliza de forma inmediata a funciones vectoriales y matriciales.

2.6. Fórmula del gradiente

Para funciones de clase C^1, las derivadas direccionales sólo dependen de las derivadas parciales su cálculo resulta bien sencillo, como se puede ver en la siguiente proposición.

Definición 2.6.1. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, llamamos gradiente en $a \in A$ de f al vector

$$\nabla f(a) \equiv \text{grad}\, f(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a)).$$

Proposición 2.6.1 (Fórmula del gradiente)**.** *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, abierto. Si $f \in C^1(A)$, entonces, para todo $a \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$ unitario:*

$$D_v f(a) =< v, \operatorname{grad} f(a) > .$$

Ejemplo 2.6.1. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. La derivada direccional en la dirección $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ en el punto $a = (2, 1)$ vale:

$$Df_v(a) =< (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (e^2, 2e^2) >= 3\frac{\sqrt{2}}{2}e^2.$$

Proposición 2.6.2. *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Sea $x_0 \in A$ tal que $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ y sea $u = \dfrac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ el vector gradiente normalizado. Entonces*

i) El vector u es el vector que hace máximo el valor de la derivada direccional $D_v f(x_0)$ entre todos los vectores unitarios $v \in \mathbb{R}^n$. Además $D_u f(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.

ii) El vector $-u$ es el vector que hace mínimo el valor de la derivada direccional $D_v f(x_0)$ entre todos los vectores unitarios $v \in \mathbb{R}^n$. Además $D_{-u} f(x_0) = -\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.

Demostración. Basta tener en cuenta que

$$< v, \operatorname{grad} f(a) >= \|v\| \cdot \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \cdot \cos\theta = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \cdot \cos\theta$$

y los valores extremos se obtienen cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. □

Observación 2.6.1. Si $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ entonces v es ortogonal al gradiente y en dicho caso $D_v f(x_0) = 0$, por lo que en este punto la función ni crece ni decrece.

2.7. Teorema del valor medio

Para este apartado necesitamos la noción de segmento entre dos puntos, esto es

Definición 2.7.1. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, el segmento $[x_1, x_2]$ de x_1 a x_2 es el conjunto de puntos $[x_1, x_2] = \{x_1 + t(x_2 - x_1) \mid t \in [0,1]\} = \{tx_2 + (1-t)x_1; t \in [0,1]\}$

Teorema 2.7.1. *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo A. Sean x_1 y x_2 dos puntos de A tales que el segmento $[x_1, x_2]$ esté totalmente contenido en A. Entonces existe un punto $x_0 \in [x_1, x_2]$ tal que*

$$f(x_2) - f(x_1) = df(x_0)(x_2 - x_1) = < \nabla f(x_0), x_2 - x_1 > .$$

Es decir, la diferencia entre los valores de la función en dos puntos distintos $f(x_1)$ y $f(x_2)$ está controlada por la diferencia de coordenadas de los dos puntos $x_{21} - x_{11}, \ldots, x_{2n} - x_{1n}$ multiplicadas por unos factores correctores que resultan ser las derivadas parciales de la función en un punto intermedio del segmento que une los dos puntos.
Geométricamente y para el caso de dos variables el teorema del valor medio se interpreta de la siguiente manera: dada una función $f(x, y)$, su gráfica es una superficie, el teorema nos dice que en la recta que une dos puntos de dicha gráfica $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ y $(x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ es paralela al vector tangente en algún punto $c = (x_0, y_0)$ de la curva que está en la superficie y definida sobre el segmento que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Ejemplo 2.7.1. El punto $c = (x_0, y_0) \in \overline{(x_1, y_1), (x_2, y_2)}$ que hace que se cumpla el teorema del valor medio para la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$ en el segmento $\overline{(0,0), (1,1)}$ es $c = (1/2, 1/2)$, ya que

$$f(0,0) = 0, f(1,1) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial x}_{|(x_0,y_0)} = y_0 \ \frac{\partial f}{\partial y}_{|(x_0,y_0)} = x_0$$

entonces

$$1 = 1 - 0 = y_0(1 - 0) + x_0(1 - 0) = x_0 + y_0$$

Además $(x_0, y_0) = t(1,1)$ con $0 \leq t \leq 1$ ya que pertenece al segmento $\overline{(0,0), (1,1)}$, por lo que $c = (1/2, 1/2)$.

Este teorema no se puede generalizar al caso de funciones vectoriales de n variables como podemos ver con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7.2. Consideremos la función $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (1 + x^2, x + x^3)$ definida en el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Buscamos un punto $x_0 \in [0,1]$ que verifique $f(1) - f(0) = df(x_0)(1-0)$ donde $f(1) = (1,1)$, $f(0) = (0,0)$, y $df(x_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1+3x_0^2 \end{pmatrix}$. La ecuación anterior es realmente un sistema de dos ecuaciones, una por cada coordenada

$$\begin{aligned} 2-1 &= 2x_0 \\ 2-0 &= 1+3x_0^2 \end{aligned}$$

que no tiene solución, ya que tendría que ser $x_0 = \dfrac{1}{2}$ y $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a la vez.

En este caso, sólo se puede aplicar a cada componente por separado: si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable, $f = (f_n, \ldots, f_m)$, y $[x_1, x_2] \in A$, entonces para cada componente f_i existirá un punto $x_{0_i} \in [x_1, x_2]$ tal que

$$f_i(x_2) - f_i(x_2) = df_i(x_{0_i})(x_2 - x_1) =< \nabla f_i(x_{0_i}), x_2 - x_1 >$$

pero no se puede asegurar que sea el mismo punto punto x_{0_i} para todas las componentes de la función f.

Aún así, esto es suficiente para demostrar otra generalización a funciones de varias variables de un resultado bien conocido de las funciones reales de una variable real: si una función derivable tiene derivada cero en un intervalo, entonces es constante en él.

Corolario 2.7.1. Sea A un conjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en A, tal que la diferencial $df(x)$ es cero en todos los puntos de A (esto es, $df(x)$ es la aplicación lineal cero, cuya matriz está formada sólo por ceros). Entonces f es constante en A.

Acotación del error

La determinación del punto intermedio puede ser complicado, pero en el caso que podamos encontrar constantes $M_i > 0$ tales que $|D_i f(x)| \leq M_i$ para todo punto x perteneciente al segmento $[x_1, x_2]$ entonces

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i |x_{1_i} - x_{2_i}|.$$

Esta fórmula la podemos utilizar en el siguiente sentido, supongamos que queremos calcular $f(x_1)$ donde x_1 es un punto que conocemos sólo aproximadamente pero se tiene control sobre el error es decir el dato que tenemos es x_2 con $|x_{2_i} - x_{1_i}| < \varepsilon_i$. Entonces, si en lugar de calcular $f(x_0)$ se calcula $f(x_1)$ el error cometido es

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i |x_{1_i} - x_{2_i}| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \varepsilon_i.$$

En la práctica es muy difícil hallar M_i, normalmente se supone que ε_i son muy pequeños y que los valores M_i se aproximan a

$$M_i \simeq |D_1 f(x_2)|,$$

Por lo que la *fórmula de la propagación del error* queda

$$|f(x_2) - f(x_1)| \simeq \sum_{i=0}^{n} |D_i f(x_2)| \cdot \varepsilon_i.$$

2.8. Fórmula de Taylor

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable $f \in C^{p+1}$, hemos visto que podíamos aproximarla por una función lineal en el entorno de un punto. Vamos a ver como podemos extender esta aproximación a polinomios de n variables de grado arbitrario $k \leq p$.
Primero vamos a hacer el estudio para $n = 2$ por más sencillez en la notación.

Teorema 2.8.1 (Fórmula de Taylor para funciones de 2 variables)**.** *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el abierto A de clase C^{p+1}. Entonces en un punto $a = (x_0, y_0) \in A$ tenemos*

$$f(x, y) = P_p(x, y) + R_{p+1}(x, y)$$

donde

a) $P_k(x, y)$ es un polinomio de grado k de dos variables llamado polinomio de Taylor de la función f de grado k.

b) $R_{p+1}(x, y)$ es el residuo del desarrollo de Taylor y verifica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_{p+1}(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^{p}} = 0.$$

Más concretamente.

a) $k = 1$ *aproximación lineal*

$$P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

b) $k = 2$ *aproximación cuadrática*

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= P_1(x,y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \right. \\ &\left. 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y)(y-y_0)^2\right), \end{aligned}$$

c) *caso general*

$$P_k(x,y) = P_{k-1}(x,y) + \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x_0,y_0)(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i.$$

Observación 2.8.1. Recordemos que $\binom{k}{i} = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Observación 2.8.2. Observamos que

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= <\text{ grad f}, (x-x_0, y-y_0)>, \\ P_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ recibe el nombre de *matriz Hessiana* de f en el punto (x_0,y_0) y la denotaremos por $H_f(x_0,y_0)$.

Ejemplo 2.8.1. Sea $f(x,y) = xe^y$,
Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{lll} f(x,y)=xe^y & \Rightarrow & f(0,0)=0 \\ D_1 f = e^y & \Rightarrow & D_1 f_0 = 1 \\ D_2 f = xe^y & \Rightarrow & D_2 f_0 = 0 \\ D_{11} f = 0 & \Rightarrow & D_{11} f_0 = 0 \\ D_{12} f = e^y & \Rightarrow & D_{12} f_0 = 1 \\ D_{21} f = e^y & \Rightarrow & D_{21} f_0 = 1 \\ D_{22} f = xe^y & \Rightarrow & D_{22} f_0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} D_{111} f = 0 & \Rightarrow & D_{111} f_0 = 0 \\ D_{112} f = 0 & \Rightarrow & D_{112} f_0 = 0 \\ D_{121} f = 0 & \Rightarrow & D_{121} f_0 = 0 \\ D_{122} f = e^y & \Rightarrow & D_{122} f_0 = 1 \\ D_{211} f = 0 & \Rightarrow & D_{211} f_0 = 0 \\ D_{212} f = e^y & \Rightarrow & D_{212} f_0 = 1 \\ D_{221} = e^y & \Rightarrow & D_{221} f_0 = 1 \\ D_{222} f = xe^y & \Rightarrow & D_{222} f_0 = 0 \end{array}$$

el desarrollo de Taylor hasta el orden 3 de dicha función en el origen es

$$f(x,y) = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + R_4 f(x,y).$$

Pasemos al caso de n variables.

Teorema 2.8.2. *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{p+1}(A)$. Si $a \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ son tales que $a+h \in D_r(a) \subset A$, entonces se verifica que*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df_a(h)}{1!} + \frac{d^2 f_a(h^{(2)})}{2!} + \ldots + \frac{d^p f_a(h^{(p)})}{p!} + R_{p+1}(h)$$

y

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_{p+1}(h)}{(\|h\|)^p} = 0,$$

con

$$\frac{df_a(h)}{1!} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot h_n$$

$$\frac{d^2 f_a(h^{(2)})}{2!} = \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} h_1 & \ldots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2!} \sum_{ij=1}^n D_{ij} f_a \cdot h_i h_j$$

$\vdots$

$$\frac{d^p f_a(h^{(a)})}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^n D_{i_1,\ldots,i_p} f_a h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_p}.$$

Observación 2.8.3. Al igual que para el caso de dos variables tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{df_a(h)}{1!} &= < \operatorname{grad} f(a), h > \\
\frac{d^2 f_a(h^{(2)})}{2!} &= \frac{1}{2!} h \cdot H_f(a) \cdot h,
\end{aligned}$$

y

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

es la matriz hessiana de f en el punto a.

Observación 2.8.4. Si la función f es por lo menos de clase C^2 la matriz hessiana de f es simétrica.

A veces se puede obtener el desarrollo de Taylor utilizando desarrollos de Taylor de funciones más sencillas, así en el ejemplo 2.8.1 observamos que la función $f(x, y)$ es producto de dos funciones $f_1(x) = x$ cuyo desarrollo es la propia función ya que es polinómica y $f_2(y) = e^y$ cuyo desarrollo es conocido

$$f(y) = 1 + y + \frac{1}{2!} y^2 + \dots$$

por lo que el desarrollo de Taylor en el origen de la función $f(x, y)$ es el producto de ambos desarrollos:

$$f(x, y) = x(1 + y + \frac{1}{2!} y^2 + \dots) = x + xy + \frac{1}{2} xy^2 + \dots$$

Este proceso de obtención del desarrollo de Taylor lo denominamos por generación.

Ejemplo 2.8.2. i)

$$\begin{aligned}
e^x \cos y = & (1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{r!} x^r + R_r) \cdot \\
& (1 - \frac{1}{2!} y^2 + \dots + (-1)^{2p} \frac{1}{(2p)!} y^{2p} + R_{(2p)} = \\
& 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} xy^2 + \\
& \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{4} x^2 y^2 + \frac{1}{24} y^4 + R_4.
\end{aligned}$$

ii)
$$\frac{1+x}{1+y} = (1+x)(1-y+y^2-\ldots+(-1)^r y^r + R_{(r)}) =$$
$$= 1+x-y-xy+y^2+xy^2-y^3+R_3.$$

2.9. Extremos

Definición 2.9.1. Sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donde C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

i) Se dice que $a \in C$ es un máximo relativo de f en C, si existe un disco $D_r(a)$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in D_r(a) \cap C$.

ii) Se dice que $a \in C$ es un mínimo relativo de f en C, si existe un disco $D_r(a)$ tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in D_r(a) \cap C$.

iii) Se dice que $a \in C$ es un máximo absoluto de f en C, si $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in C$.

ii) Se dice que $a \in C$ es un mínimo absoluto de f en C, si $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in C$.

Los máximos y mínimos de una función se denominan *extremos* de la función. Observar que en la definición de extremos no se ha exigido ninguna condición al conjunto C, por lo que los puntos donde la función no es continua o en puntos del dominio de definición que se hallan en la frontera del dominio son posibles candidatos a extremos.
Aquí trataremos el caso en el que el conjunto C es un conjunto abierto.

Proposición 2.9.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(A)$ definida sobre A subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si un punto $a \in A$ es un extremo relativo de f en A entonces*

$$D_i f(a) = 0, \quad \textit{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

es decir, si el gradiente de la función en dicho punto es nulo (esto es grad $f(a) = 0$) el punto es candidato a extremo.
Los puntos de A para los cuales el gradiente de la función en dicho punto es nulo, reciben el nombre de *críticos*.
El recíproco de esta proposición no es cierto, es decir el hecho de que el gradiente de la función en un punto sea nulo no implica que necesariamente este punto sea un extremo.

Ejemplo 2.9.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x,y) = x^2 - y^2$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$, por lo que el único punto en que el gradiente de la función en dicho punto es nulo es el $(0,0)$. Sin embargo para todo punto $(\varepsilon, 0)$ con $\varepsilon > 0$ se tiene que $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$ y para todo punto $(0, -\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ se tiene que $f(0, -\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$, por lo que el punto $(0,0)$ no es extremo.

Supongamos ahora que la función es de clase por lo menos $C^3(A)$ por lo que podemos escribir su desarrollo de Taylor hasta orden dos en el punto crítico $a \in A$:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) H_f(a) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \ldots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} + R_2(x)$$

En 2.8.4, hemos observado la simetría de la matriz hessiana, por lo que es la matriz de una forma cuadrática que diagonaliza siempre con valores propios reales y en una base ortonormal (ver [6] para más detalles) donde se observa que el valor máximo que una forma cuadrática toma sobre la esfera unidad es el valor propio máximo de la matriz y que el valor mínimo que puede alcanzar la forma cuadrática sobre la esfera unidad es el valor propio mínimo. Esto nos permite deducir que el signo de los valores propios de la matriz hessiana en dicho punto, nos dará información sobre el posible carácter de extremo del punto crítico $a \in A$.

Teorema 2.9.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^3(A)$. Sea $a \in A$ un punto crítico de f y $H_f(a)$ la matriz hessiana de f en el punto a.*

a) Si todos los valores propios son positivos entonces el punto a es un mínimo local

b) Si todos los valores propios son negativos entonces el punto a es un máximo local

c) Si la matriz hessiana tiene valores propios positivos y valores propios negativos entonces el punto a es un punto de silla (no es ni máximo ni mínimo)

d) En los demás casos la matriz hessiana no da información sobre el carácter de extremo del punto crítico $a \in A$.

En bien sabido que el signo de los valores propios de una matriz simétrica se puede conocer a partir de los signos de la secuencia de ciertos menores principales de dicha matriz, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.9.2. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^3(A)$. Sea $a \in A$ un punto crítico de f y $H_f(a)$ la matriz hessiana de f en el punto a. Consideremos la sucesión de menores principales siguiente:*

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = \det H_f(a).$$

Entonces

a) Si $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $\ldots$, $D_n > 0$, la función alcanza un mínimo relativo en a.

b) Si $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $\ldots$, $(-1)^n D_n > 0$, la función alcanza un máximo relativo en a.

c) Si $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, $\ldots$, $D_n \geq 0$, no se puede afirmar nada.

d) Si $D_1 \leq 0$, $D_2 \leq 0$, $\ldots$, $(-1)^n D_n \leq 0$, no se puede afirmar nada.

e) En los demás casos en a no hay extremo.

Ejemplo 2.9.2. Sea $f(x, y) = x^2 y^3 - 2xy + x$,
Los posibles extremos han de cumplir que $D_1 f(x, y) = D_2 f(x, y) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} D_1 f(x,y) & = y^3 2x - 2y + 1 = 0, \\ D_2 f)x,y) & = x^2 3y^2 - 2x = 0, \end{array}\right\}$$

por lo que los puntos candidatos son

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = (0, 1/2), \\ a_2 = (8/27, 3/2). \end{array}\right.$$

Calculemos la matriz hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 - 2 \\ 6xy^2 - 2 & 6x^2 y \end{pmatrix}.$$

En el punto $a_1$se tiene

$$H_f(a_1) = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ D_1 > 0, D_2 = -4,$$

en este punto no hay extremo es un punto de silla.
En el punto a_2

$$H_f(a_2) = \begin{pmatrix} 27/4 & 2 \\ 2 & 64/81 \end{pmatrix}, D_1 > 0, D_2 = 4/3 > 0,$$

en este punto se alcanza un mínimo.

Aunque el estudio de extremos lo hemos limitado al estudio de extremos relativos de funciones definidas sobre dominios abiertos, queremos destacar por su importancia el siguiente resultado.

Teorema 2.9.3. *Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua sobre el conjunto K compacto. Entonces existen puntos $x_1, x_2 \in K$ tales que*

$$f(x_1) < f(x) \text{ y } f(x_2) > x \text{ para todo } x \in K.$$

Es decir, la función f alcanza su mínimo absoluto en x_1 y máximo absoluto en x_2.

Ejemplo 2.9.3. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ definida sobre $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces, la función alcanza su mínimo absoluto en $x_1 = (0,0)$ $(f(0,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in K$, y alcanza su máximo absoluto en los puntos (x,y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $\forall (x,y) \in K$.

2.10. Cambios de variables

Supongamos que tenemos una función $y = f(x)$ que tiene una inversa local en un dominio A, y que esa inversa local $x = f^{-1}(y)$ está definida en un dominio B. Entonces a cada punto x de A le corresponde un único punto y en B, y viceversa. Esto significa que podemos usar los valores de y para representar a los x, sin que se produzcan ambigüedades ni pérdidas de información. Es decir, que podemos utilizar la fórmula $y = f(x)$ para cambiar la variable x por la variable y. Si a partir de la variable y queremos recuperar la variable x, hacemos $x = f^{-1}(y)$.
Vamos a continuación a formalizar este concepto de cambio de variables que acabamos de introducir.

Definición 2.10.1. Dados abiertos A y B de $\mathbb{R}^n$. Un cambio de variables de clase C^k $(k \geq 1)$ entre A y B es una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

i) $f \in C^k(A)$,

ii) f es inyectiva y $B = f(A)$,

iii) $f^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^k en B.

Esta definición nos dice que la función f deforma de manera suave el dominio A en el dominio B.

Ejemplo 2.10.1. La función $f : A \longrightarrow B$ definida de la forma

$$f(r, \theta) = (x, y) = (r \cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

donde $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ y $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$, es un cambio de coordenadas.
la función f^{-1} está definida de tal forma

$$f^{-1}(x, y) = (r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}).$$

Si $f : A \longrightarrow B$ con $A, B \subset \mathbb{R}^n$ es un cambio de coordenadas de clase C^k, entonces $f^{-1} \circ f = I$, lo que si aplicamos la regla de la cadena

$$Df^{-1}(f(x)) \cdot Df(x) = I$$

en cuyo caso $\det Df(x) \neq 0$ y $Df^{-1}(f(x)) \neq 0$.

En general no es fácil saber si una función f es un cambio de variables entre un dominio A y su imagen, por un lado puede ser difícil saber si la función es o no inyectiva y por otra parte describir el conjunto imagen. A nivel local podemos averiguar si la función es "localmente"inyectiva, esto es inyectiva en un pequeño entorno de un punto dado, definiendo un cambio de coordenadas en este entorno.

Teorema 2.10.1 (de la función inversa)**.** *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con A un abierto de $\mathbb{R}^n$ una función de clase $C^k(A)$ y $a \in A$. Si $\det Df(a) \neq 0$, entonces existe $r \geq 0$ tal que*

i) $f : D_r(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es inyectiva,*

ii) Si $B = f(D_r(a))$, entonces existe $f^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inversa local de f de clase $C^k(B)$, $\forall x \in D_r(a)$,

iii) $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

Observación 2.10.1. El teorema de la función inversa no nos dice como buscar la función inversa (en caso de que exista), la información de que disponemos es el punto a, su imagen $f(a)$ y $Df^{-1}f(a)$ por lo que podemos describir la aproximación lineal de la función inversa en el entorno de $f(a)$.

Ejemplo 2.10.2. Sea $f(x, y) = (xy, 2x - 3y)$, vamos a estudiar la existencia de inversa local en el entorno del punto $a = (1, 1)$.
Primero observamos que la función es de clase C^∞.

$$Df(a) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det Df(a) \neq 0$$

por lo que existe inversa local f^{-1} de f en el entorno de $f(1, 1) = (1, -1)$.
Además

$$Df^{-1}(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

y la aproximación lineal de f^{-1} en el entorno del punto $(1, -1)$ es

$$f^{-1}(u, v) = (1, 1) - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u - 1 \\ v + 1 \end{pmatrix}.$$

Una aplicación del teorema de la función inversa es la siguiente. Supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones no lineales en las variables $x_1, \dots, x_n$ de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x_1,\dots,x_n) & = a_1 \\ \vdots & \\ f_n(x_1,\dots,y_n) & = a_n \end{array}\right\}$$

de donde $a_i \in \mathbb{R}$ son valores dados.
Supongamos que $p = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})$ es una solución del sistema y nos preguntamos si modificando ligeramente los valores de a_i en las ecuaciones, el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x_1,\dots,x_n) & = u_1 \\ \vdots & \\ f_n(x_1,\dots,y_n) & = u_n \end{array}\right\}$$

donde u_i son los nuevos valores próximos a los a_i, tiene solución única para $x_1, \dots, x_n)$ próxima al punto p. Tenemos $f = (f_1, \dots, f_n)$ tal que $f(x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) = (a_1, \dots, a_n)$.
El teorema de la función inversa nos dice que si det $Df(p) \neq 0$ entonces para todo punto $(u_1, \dots, u_n)$ próximo a $(a_1, \dots, a_n)$ las ecuaciones admiten una única solución próxima a p. Además tenemos la siguiente aproximación:

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) + (Df(p))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_1 - a_1 \\ \vdots \\ u_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.10.3. Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = 2 \\ x^2 - y^2 & = 0 \end{array}\right\}.$$

Este sistema tiene a $(1,1)$ por solución y ahora consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = u \\ x^2 - y^2 & = v \end{array}\right\}.$$

Veamos que si $(u,v) \simeq (2,0)$ entonces tenemos solución única próxima a $(1,1)$.
Tenemos

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$$

y

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det Df(1,1) \neq 0.$$

Por lo tanto, por el teorema de la función inversa tenemos que el sistema de ecuaciones tiene solución única para $(x, y) \simeq (1, 1)$ siempre que $(u, v) \simeq (1, 1)$. Además

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u-2 \\ v-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-2 \\ v-0 \end{pmatrix}.$$

PARTE II

Capítulo 3

Integración de funciones de n variables

3.1. La integral de Riemann

En este capítulo ampliamos la noción de integración de funciones de una variable a funciones de varias variables.
Empezamos recordando la noción de integral de Riemann de funciones de una variable.

Definición 3.1.1. Una partición de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a, b]$ que incluye a los extremos. Una partición P la representamos ordenando sus puntos de menor a mayor, comenzando en el extremo a y terminando en el extremo b:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}. \tag{3.1}$$

El conjunto de las particiones de $[a, b]$ lo indicamos con $P([a, b])$. Las particiones dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, cuya longitud es $x_i - x_{i-1}$.
Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$, y sea P una partición como la definida en (3.1). Para cada $i = 1, \ldots, n$, consideramos

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Definición 3.1.2. Llamamos

i) suma inferior de f asociada a P como

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

ii) suma superior de f asociada a P es

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Observación 3.1.1. Para cualquier partición P tenemos que $s(f,P) \leq S(f,P)$, ya que $m_i \leq M_i$ para cada i. También, si llamamos $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, y $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, se tiene que $m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$ cualquiera que sea la partición P.

La suma inferior aumenta a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o superior.
La suma superior disminuye a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o inferior.

Sumas de Riemann

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo cerrado $[a,b]$ y f es una función definida en ese intervalo, entonces la Suma de Riemann de f respecto de la partición P se define como:

$$R(f,P) = f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

donde t_j es un número arbitrario en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.

Relación entre la integral y la medida de áreas

Supongamos que f es una función no negativa y consideremos la región que delimita su gráfica con las rectas y = 0, x = a y x = b. Si el área de dicha region es A, entonces

$$s(f,P) \leq A \leq S(f,P),$$

ya que las respectivas sumas son las áreas que obtenemos si cambiamos f en cada $[x_{i-1}, x_i]$ por m_i o M_i, y los hemos definido de forma que $m_i \leq f(x) \leq M_i$.
Parece claro que si tomamos una partición suficientemente grande (es decir con muchos puntos) podemos conseguir que tanto la suma superior como la inferior sean arbitrariamente próximas al área A.

Definición 3.1.3. Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$, se define su integral inferior en $[a, b]$ como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, P) \mid \text{para toda partición } P \text{ de } [a, b]\},$$

y su integral superior en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, P) \mid \text{para toda partición } P \text{ de } [a, b]\}.$$

Observación 3.1.2. La integral inferior y la superior son valores reales perfectamente definidos para cualquier función acotada en un intervalo cerrado y acotado.

No es díficil adivinar que la integral inferior es siempre menor o igual que la superior, aunque no es fácil demostrar.

Definición 3.1.4. Una función f acotada en $[a, b]$ se dice que integrable-Riemann en $[a, b]$, o simplemente integrable, si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En dicho caso, al valor común de dichas integrales se le llama la integral (de Riemann) de f en $[a, b]$, y se escribe

$$\int_a^b f.$$

A veces es cómodo escribir la integral como

$$\int_a^b f(x)dx,$$

expresando la función mediante su valor $f(x)$ en la variable x.

Ejemplo 3.1.1. i) Sea $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$ y P es la partición trivial $\{a, b\}$. Entonces $s(f, P) = k(b-a) = S(f, P)$. Se comprueba fácilmente que lo mismo sucede para cualquier otra partición, así que la integral superior y la inferior coinciden con $k(b-a)$. Es decir,

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

ii) Sea $f(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$ su integral superior y su inferior coinciden con $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Es decir,

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Dada una función f acotada y no negativa, hemos observado que $s(f, P) \leq A \leq S(f, P)$ para cada partición P, si A es el área de la región que limita la gráfica de f. Por tanto A es una cota superior del conjunto de las sumas inferiores y una cota inferior del conjunto de las sumas superiores, y entonces

$$\underline{\int_a^b} f \leq A \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Por lo tanto, si f es integrable, los dos extremos de la desigualdad anterior coinciden con $\int_a^b f$, así pues el área A es igual a la integral. Es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ nos proporciona el valor del área (orientada) del recinto limitado por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$.

Cálculo de la integral

Teorema 3.1.1 (Regla de barrow)**.** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $F(x)$ una primitiva de f (es decir $F'(x) = f(x)$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

3.2. Integración de funciones de dos variables

Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo contenido en $\mathbb{R}^2$. Si la función f es positiva (esto es, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$) la integral "doble"

$$\int \int_R f(x, y) dx dy$$

nos proporciona el volumen del recinto cerrado de $\mathbb{R}^3$ limitada por la gráfica de la función $z = f(x, y)$, el plano xy y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

Observación 3.2.1. i) Si la función no es positiva entonces no podemos hablar de volumen propiamente, en dicho caso hacemos

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_R f^+(x, y) dx dy - \int \int_R f^-(x, y) dx dy$$

donde $f^+(x, y) = \max(f, 0) \geq 0$ y $f^-(x, y) = \max(-f, 0) \geq 0$.

ii) Si queremos calcular la integral doble de una función que está definida sobre un dominio acotado $A \subset \mathbb{R}^2$ pero que no es un rectángulo, podemos tomar un rectángulo R que contenga dicho dominio $A \subset R$ (que existe por ser A acotado) y extender la función f a una función $\tilde{f}$ definida sobre todo el rectángulo de la forma

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \forall (x, y) \in A \\ 0, & \forall (x, y) \notin A \end{cases}$$

Es claro que el volumen $\int \int_A f(x, y) dx dy$ es el mismo que el volumen $\int \int_R \tilde{f}(x, y) dx dy$.

A continuación vamos a construir la integral doble $\int \int_R f$ sobre el rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Para ello empezamos haciendo una partición sobre el rectángulo R en m^2 subrectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para $i, j = 1, \ldots, m$ cuyos lados son $x_i = a + i\dfrac{b-a}{m}$ y $y_j = c + j\dfrac{d-c}{m}$ para $i, j = 0, \ldots, m$. Las longitudes de los lados de dichos rectángulos son iguales para todos concretamente $\dfrac{b-a}{m}$, $\dfrac{d-c}{m}$ por lo que el área de cada rectángulo R_{ij} es $\dfrac{(b-a)(d-c)}{m^2}$.

Definición 3.2.1. Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y sea $m \in \mathbb{N}$ un número natural. Llamaremos suma superior m-ésima de la función f en R a

$$S_m(f,R) = \frac{(b-a)(c-d)}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} \sup_{(x,y)\in R_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

Definición 3.2.2. Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y sea $m \in \mathbb{N}$ un número natural. Llamaremos suma inferior m-ésima de la función f en R a

$$s_m(f,R) = \frac{(b-a)(c-d)}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} \inf_{(x,y)\in R_{ij}}\{f(x,y)\}.$$

De esta manera hallamos una aproximación del volumen $\int\int_R f(x,y)dxdy$ por paralelepípedos de base R_{ij} en los que el área de la base es $\dfrac{(b-a)(d-c)}{m^2}$ y la altura en el primer caso es $\sup\{f(x,y)\}$ y el paralelepípedo contiene la gráfica de $f_{|R_{ij}}$ y en el segundo caso es $\inf\{f(x,y)\}$ y el paralelepípedo está contenido en la gráfica de $f_{|R_{ij}}$. Por lo que tenemos

$$s_m(f,R) \leq \int\int_R f(x,y)dxdy \leq S_m(t,R).$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $f(x,y) = 1-y$ definida en $R = [0,1]\times[0,1]$, $R_{ij} = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]$.

i)) Para $m = 1$ tenemos $S_1(f,R) = 1$, $s_1(f,R) = 0$

ii) Para $m = 2$ tenemos $S_2(f,R) = \frac{1}{4}(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $s_2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0) = \frac{1}{4}$

iii) Para $m = 3$ tenemos $S_3(f,R) = \frac{1}{9}(1+1+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, $s_3(f,R) = \frac{1}{9}(0+0+0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

Observamos que

$$s_1(f,R) \leq s_2(f,R) \leq s_3(f,R) \leq \ldots \leq S_3(f,R) \leq S_2(f,R) \leq S_1(f,R).$$

La aproximación anterior nos lleva a la siguiente definición de función integrable en un rectángulo.

Definición 3.2.3. Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Decimos que f es integrable en R si existe y coinciden los límites de las sumas superiores e inferiores

$$\lim_{m\to\infty} s_m(f, R) = \lim_{m\to\infty} S_m(f, R) = I.$$

En dicho caso escribimos

$$\int\int f(x, y)dxdy = I.$$

Teorema 3.2.1 (Criterio de integrabilidad en un rectángulo)**.** *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función definida en un rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$ acotada y contínua excepto en un conjunto de puntos $A \subset R$ que está contenido en la unión de un número finito de curvas continuas contenidas en R. Entonces f es integrable en R.*

Ejemplo 3.2.2. Sea $f(x, y)$ una función escalonada definida en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ de la forma

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in R, x \in [0, 1/2] \\ 4 & \text{si } (x, y) \in R, x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Por el teorema anterior la función es integrable ya que la función deja de ser continua en una curva continua contenida en R, concretamente el segmento $x = 1/2$.
Es fácil ver que

$$\int\int_R f(x, y)dxdy = 1 + 2 = 3.$$

El resultado anterior puede ampliarse con el siguiente teorema, si bien antes necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.2.4. Un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ es de medida nula si

$$\int\int_D 1dxdy = 0.$$

Observación 3.2.2. $\int\int_D 1dxdy$ es el área del recinto.

Observación 3.2.3. i) El área (o medida) de un punto es nula

ii) El área (o medida) de una curva continua en $\mathbb{R}^2$ es nula.

iii) La unión finita de conjuntos de área (medida) nula es de medida nula.

Teorema 3.2.2. *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función acotada definida en un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ excepto en un conjunto de puntos $A \subset R$ de medida nula. Entonces f es integrable en R.*

Proposición 3.2.1. *Sean $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y definidas sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, tales que $f(x,y) = g(x,y)$ excepto en un conjunto de puntos $p = (x,y) \in D \subset R$ con D de medida nula. Entonces*

$$\int\int_R f(x,y) = \int\int_R g(x,y).$$

Vamos a intentar ampliar la definición de integrabilidad de una función sobre dominios un poco más generales que el rectángulo.

Definición 3.2.5. Diremos que un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ del plano es un dominio elemental si es un conjunto acotado y su frontera está formada por una unión finita de curvas continuas.

Ejemplo 3.2.3. Los rectángulos, los discos, las coronas circulares y los polígonos son entre otros, dominios elementales.

Teorema 3.2.3. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un dominio elemental y continua en todo D excepto en un conjunto de puntos $A \subset D$ de área (medida) nula. Entonces f es integrable en D.*

3.3. Integración de funciones de tres o más variables

La construcción realizada para $n = 2$ se puede extender a funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$ de tres o más variables sobre n-paralelepípedos $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Observación 3.3.1. Para el caso $n = 3$ escribiremos $f(x,y,z)$.

En este caso el volumen del paralelepípedo P es $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$. Dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ acotado su volumen viene dado por

$$\int \ldots \int_D 1 dx_1 \ldots dx_n.$$

Observación 3.3.2. Para el caso $n = 3$ escribiremos $\int\int\int_D 1 dxdydz$.

3.4. Propiedades de la integral

A partir de ahora $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio elemental y si no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente $\int_D f$ para indicar a la integral de la función f en D, en lugar de $\int \ldots \int_D f$.

Proposición 3.4.1. *i) Linealidad: Si f y g son dos funciones integrables en el dominio D entonces $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\int_D \lambda f + \mu g = \lambda \int_D f + \mu \int_D g.$$

ii) $|\int_D \int \leq \int_D |f|$.

iii Si $f(p) \geq g(p)$ $\forall p \in D$, entonces :

$$\int_D f \geq \int_D g.$$

iv) Si $D = D_1 \cup D_2$ disjuntos, entonces

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Proposición 3.4.2 (Teorema del valor medio para integrales)**.** *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio elemental y f continua en todo el dominio D. Entonces, existe un punto $p_0 \in D$ tal que*

$$\int_D f = f(p_0) \cdot \int_D 1.$$

Observación 3.4.1. Si $n = 2$, $\int_D 1$ es el área del recinto D y si $n = 3$ es el volumen de dicho recinto D.

Ejemplo 3.4.1. Sea $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2)$ definida sobre $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$. Entonces,

$$\int\int_D \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2)dxdy = \operatorname{sen}^2(x_0^2 + y_0^2)\int_D 1 = \operatorname{sen}^2(x_0^2 + y_0^2)\cdot\pi\cdot 3^2.$$

Observamos que D es un disco de radio 3, por lo que su área es $\pi \cdot 3^2$ y $p = (x_0, y_0) \in D$.
El punto p es desconocido, entonces intentamos acotar el valor:

$$0 \leq \operatorname{sen}^2(x_0^2 + y_0^2) \leq 1,$$

luego

$$0 \leq \int_D \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2) \leq 9\pi.$$

De hecho podemos acotar un poco más pues $x_0^2 + y_0^2 \leq 9$, luego (puesto que entre 0 y 9 la función sen es monótona), $\operatorname{sen}^2(x_0^2 + y_0^2) \leq \operatorname{sen}^2 9 \leq 0{,}024649$, obteniendo

$$0 \leq \int_D \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2) \leq 0{,}024649\pi.$$

3.5. Cálculo de integrales

Uno de los puntos claves para el cálculo de funciones de más de una variable es el cálculo de primitivas de las funciones respecto cada una de las variables. Para el caso de funciones de dos variables definidas sobre rectángulos es fácil probar que si $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_R 1dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b 1dx\right) dy = \int_c^d (b - a)dy = (b - a)(d - c),$$

o probar que

$$\int_R 1dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d 1dy\right) dx = \int_a^b (d - c)dy = (b - a)(d - c).$$

De forma un poco más general, es fácil probar que si tenemos un dominio elemental o simple definido de la forma

$$D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \subset R = [a, b] \times [c, d]$$

donde $\phi, \psi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ son dos funciones continuas. Entonces

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} 1dy \right) dx = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))dx = A$$

siendo A el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones ψ, y ϕ, lo que coincide con el área de D, es decir

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} 1dy \right) dx = \int\int_D dxdy.$$

Por simetría si el dominio D es de la forma

$$D = \{\phi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\} \subset R = [a, b] \times [c, d]$$

donde $\phi, \psi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ son dos funciones continuas. Entonces

$$\int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} 1dx \right) dy = \int_c^d (\psi(y) - \phi(y))dy = A$$

siendo A el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones ψ, y ϕ, lo que coincide con el área de D, es decir

$$\int_c^c \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} 1dx \right) dy = \int\int_D dxdy.$$

Por lo que en estos casos hemos reducido el cálculo de la integral doble al cálculo iterado de integrales de funciones de una variable.

Ejemplo 3.5.1. Calcular el aŕea del cuadrilátero de vértices $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 5)$, $(3, 9)$.
El cuadrilátero podemos representarlo de la manera

$$D = \{1 \leq x \leq 3, 0 \leq \phi(x) = 2x + 3\},$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_D dxdy &= \int_1^3 dx \int_0^{2x+3} 1 \cdot dy = \int_1^3 [y]_0^{2x+3} dx \\ &= \int_1^3 (2x+3)dx = [x^2+3x]_1^3 \\ &= (3^2+3\cdot 3) - (1^2 + 3 \cdot 1) = 18 - 2 = 16.\end{aligned}$$

La ventaja de este procedimiento es que reducimos el cálculo de integrales de funciones de dos variables al cálculo de primitivas. Nos preguntamos si este procedimiento puede generalizarse para el cálculo de integrales de funciones de dos o más variables.
De hecho ya observamos que una de las dificultades puede estar en la parametrización del dominio de integración.
Vamos a empezar introduciendo el denominado principio de Cavalieri que proporciona un método intuitivo para el cálculo de volúmenes y motiva a su vez el cálculo de integrales de funciones de dos o más variables mediante el teorema de Fubini.

3.5.1. El principio de Cavalieri

Supongamos ahora que tenemos un dominio D cuya frontera no pueda expresarse en términos de gráficas de funciones (es decir expresar y en función de x o x en función de y). Para este caso tenemos el *principio de Cavalieri* para el cálculo de áreas.
Si D es un dominio acotado, entonces si $(x, y) \in D$ los valores de x varían entre $a \le x \le b$, denotemos por $\ell(x_0)$ la suma de las longitudes de los segmentos que se obtienen de cortar el dominio D por rectas verticales $x = x_0$. Entonces, el área del dominio D es

$$\int_D 1 = \int_a^b \ell(x)dx.$$

Análogamente, al ser D un conjunto acotado se tiene que los valores de y varían entre $c \le y \le d$, y si cortamos el dominio por rectas horizontales $y = y_0$ y denominamos por $\ell(y_0)$ la suma de las longitudes de los segmentos obtenidos, entonces el área del dominio D es

$$\int_D 1 = \int_c^d \ell(y)dy.$$

Nos vamos a centrar ahora, en el caso de tres variables. El principio de Cavalieri nos dice que: Si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces tienen el mismo volumen.
Más concretamente,

Proposición 3.5.1 (Principio de Cavalieri)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un domino elemental tal que si $(x, y, z) \in D$ entonces $x \in [a, b]$. Sea $A(x_0)$ el área de la región plana determinada por el corte de D por el plano $x = x_0$. Entonces,*

$$\textit{Volumen}\,(D) = \int_a^b A(x)dx.$$

El mismo resultado es válido si $y \in [a, b]$ y cortamos D por el plano $y = y_0$:

$$\text{Volumen}\,(D) = \int_a^b A(y)dy.$$

y si $y \in [a, b]$ y cortamos D por el plano $z = z_0$:

$$\text{Volumen}\,(D) = \int_a^b A(z)dz.$$

Ejemplo 3.5.2. Una aplicación bien conocida del Principio de Cavalieri nos permite calcular el volumen de una esfera. Podemos comparar el área de una sección de un hemisferio y el área de una sección de un cuerpo que es un cilindro menos un cono. Estas dos áreas son iguales. Entonces los dos cuerpos tienen el mismo volumen. Es fácil calcular el volumen de este segundo cuerpo, y así obtenemos el volumen del hemisferio.
El dominio es $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, las secciones de la esfera por planos $z = z_0$ son discos de radio $\sqrt{R^2 - z_0^2}$ cuya área es $\pi(R^2 - z_0^2)$.
Por lo tanto, el volumen de la esfera es

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \pi[R^2 z - \frac{z^3}{3}]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Entonces, el volumen de una esfera de radio R es (como Arquímedes conocía hace unos cuantos años):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

No siempre el principio de Cavalieri nos permite obtener el volumen de una región. De todas formas, en los casos que podemos usarlo debemos seleccionar bien los planos con los que vamos a seccionar la región a fin de que el área sea fácil de hallar así como su integral.

3.5.2. El teorema de Fubini

Teorema 3.5.1. *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $R = [a,b] \times [c,d]$ una función continua en el dominio. Entonces, existen las integrales $\int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$, $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$ y verifican*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y))dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Observación 3.5.1. Las integrales $\int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$, $\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$ reciben el nombre de integrales iteradas.

Ejemplo 3.5.3. Sea $f(x,y) = x \operatorname{sen}(xy)$ una función definida sobre $R = [0, \pi/4] \times [0,1]$. La función es claramente continua, podemos pues, aplicar el teorema

$$\begin{aligned} \int\int_R x \operatorname{sen}(xy) dxdy &= \int_0^{\pi/4} (\int_0^1 x \operatorname{sen}(xy)dy)dx = \int_0^{\pi/4} [\cos(xy)]_0^1 \\ &= \int_0^{\pi/4} (-\cos x + 1)dx = [-\operatorname{sen} x + x]_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Observamos que si hubiéramos considerado $\int_0^1 (\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen}(xy)dy)dx$ si bien el resultado sería el mismo, los cálculos hubieran sido más complicados.

Corolario 3.5.1. Supongamos que la función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x,y) = g(x) \cdot h(x)$. Entonces

$$\int_R f(x,y)dxdy = (\int_a^b g(x)dx) \cdot (\int_c^d h(y)dy).$$

Ejemplo 3.5.4. Sea $f(x,y) = e^x \cos y$ definida sobre el rectángulo $[0,1] \times [0, \pi/2]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_R f(x,y)dxdy &= (\int_0^1 e^x dx) \cdot (\int_0^{\pi/2} \cos y)dy \\ &= ([e^x]_0^1) \cdot ([\operatorname{sen} y])_0^{\pi/2}) = (e-1) \cdot (1-0) = e - 1. \end{aligned}$$

De hecho el teorema de Fubini es más general, no hace falta que la función sea continua, le basta con que sea integrable, si bien con algunos matices.

Teorema 3.5.2. *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable definida sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que las funciones $f_x : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas de la forma $f_x(y) = f(x, y)$ son integrables en $[c, d]$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, la función $x \longrightarrow \int_c^d f(x, y)dy$ es integrable en $[a, b]$, y*

$$\int\int_R f = \int_a^b (\int_c^d f_x(y)dy)dx,$$

que podemos escribir de una forma más práctica,

$$\int\int_R f = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx.$$

Análogamente, si se supone que $f_y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas de la forma $f_y(x) = f(x, y)$ son integrables en $[a, b]$, para todo $y \in [c, d]$. Entonces, la función $y \longrightarrow \int_a^b f(x, y)dx$ es integrable en $[c, d]$, y

$$\int\int_R f = \int_c^d (\int_a^b f_y(x)dx)dy,$$

que podemos escribir de una forma más práctica,

$$\int\int_R f = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dy)dx.$$

Observación 3.5.2. A pesar de que una función sea integrable es posible que alguna de las integrales iteradas no exista, pero en caso de que ambas existan entonces han de coincidir.

La observación 3.5.2 nos proporciona un criterio de no integrabilidad de una función.

Criterio de no integrabilidad

Sea f una función definida en un rectángulo R. Si existen las integrales iteradas y son distintas, entonces la función no es integrable en el recinto.

Ejemplo 3.5.5. Sea $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ definida en $R = [0,1] \times [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx) dy &= \textstyle\int_0^1 (\int_0^1 (\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3}) dx) dy \\
&= \textstyle\int_0^1 [-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}]_0^1 dy = \int_0^1 (-\frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2}) dy \\
&= \textstyle\int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = [\frac{1}{1+y}]_0^1 = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

y por simetría se tiene

$$\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy) dx = \frac{1}{2},$$

que son distintos luego la función $f(x,y)$ no es integrable en R. (Observar que la función no es continua en el origen).

Este resultado se puede aplicar a recintos (acotados) A más generales que rectángulos, extendiendo la función a un rectángulo R que contenga a A dándole valor cero para todos los puntos $p \in R - A$, y usando entonces el teorema de Fubini. El siguiente corolario nos muestra una manera de hacer esto, el resultado puede utilizarse eficientemente para descomponer una región complicada en regiones más pequeñas y a cada una de las cuales se aplica entonces el corolario.

Corolario 3.5.2. Sean $\phi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $\phi(x) \leq y \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$, y sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en un número finito de puntos). Entonces

$$\int_A f = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy) dx.$$

Ejemplo 3.5.6. Sea $f(x,y) = xy$ definida sobre el recinto $A = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\textstyle\int\int_A xy &= \textstyle\int_1^2 (\int_1^{x^2} xy dy) dx = \int_1^2 [\frac{1}{2} xy^2]_1^{x^2} = \int_1^2 (\frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2} x) dx = \\
&= \textstyle [\frac{1}{12} x^5 - \frac{1}{4} x^2]_1^2 = \dfrac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Enunciamos ahora este teorema de forma más general.

Teorema 3.5.3. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos, y $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que las funciones $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_x(y) = f(x,y)$ son integrables sobre B para todo $x \in A$. Entonces, la función $x \longrightarrow \int_B f(x,y)dy$ es integrable en A, y*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)dy\Big)dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_A f(x,y)dx$ existe para cada $y \in B$, entonces

$$\int_{A\times B} f = \int_B \Big(\int_A f(x,y)dx\Big)dy.$$

De igual manera que el corolario 3.5.2 puede demostrarse, a partir de la versión general del teorema de Fubini, el siguiente resultado, muy útil a la hora de evaluar integrales en R^{n+1}.

Corolario 3.5.3. Sea A un conjunto con volumen de R^n, sean $\phi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in A$, y sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en un número finito de puntos). Entonces

$$\int_D f = \int_A \Big(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Corolario 3.5.4. Para funciones de tres variables, tenemos

i) Sea $g(x,y,z)$ definida sobre $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, entonces

$$\int\int\int_R g(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_e^f g(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx$$

o equivalentemente

$$\int\int\int_R g(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \Big(\int_c^d \Big(\int_a^b g(x,y,z)dx\Big)dy\Big)dz$$

o cualquier orden en que consideremos las integrales iteradas.

ii) Sea $g(x,y,z)$ definida sobre un dominio elemental A definido de la forma

$$A=\{(x,y,z)\mid a\leq x\leq b,\phi_1\leq y\leq\phi_2,\psi_1\leq z\leq\psi_2\}$$

Entonces

$$\int\int\int_A=\int_a^b(\int_{\phi_1}^{\phi_2}(\int_{\psi_1}^{\psi_2}g(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Ejemplo 3.5.7. Sea $f(x,y,z)=z$ definida sobre el recinto $A=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x, 0\leq z\leq y^2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int\int\int_A z &= \int_0^1(\int_0^x(\int_0^{y^2}zdz)dy)dx=\int_0^1(\int_0^x[\tfrac{1}{2}z^2]_0^{y^2}dy)dx=\\ &=\int_0^1(\int_0^x\tfrac{1}{2}y^4dy)dx=\int_0^1[\tfrac{1}{10}y^5]_0^x)dx=\int_0^1\tfrac{1}{10}x^5dx=[\tfrac{1}{60}x^6]_0^1=\frac{1}{60}.\end{aligned}$$

3.6. Cambios de variable

Al igual que para funciones de una variable, en ocasiones un cambio de variables puede facilitar la resolución de una integral múltiple. Esta es una de las técnicas más usuales en el cálculo de integrales, cuyo objetivo es transformar la integral a calcular en otra más sencilla.
Así por ejemplo si tenemos que integrar una función de dos variables sobre un disco parece razonable usar coordenadas polares. Vamos a formalizar el procedimiento del cambio de variables.
En lo que sigue consideramos cambios de variable entre dos conjuntos abiertos acotados del plano A y B de la forma

$$\begin{aligned}T:A &\longrightarrow B\\ (u,v) &\longrightarrow (x,y)=(x(u,v),y(u,v))\end{aligned}$$

donde T es una función que verifica el teorema de la función inversa, es decir

i) T es una función biyectiva de clase C^1 como mínimo,

ii)

$$\det DT(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\neq 0,\ \forall(u,v)\in A.$$

Por lo que existe la función T^{-1} que es también de clase C^1.

Definición 3.6.1. Denominaremos jacobiano de T al determinante de la matriz jacobiana de T, y lo notaremos por $|J_T(u,v)|$:

$$|J_T(u,v)| = \det DT(u,v).$$

Teorema 3.6.1 (Cambio de variables para funciones de dos variables)**.** *Sean A y B dos conjuntos abiertos acotados del plano y $T : A \longrightarrow B$ un cambio de variables. Entonces, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable se tiene que*

$$\int\int_B f(x,y) = \int\int_A f(x(u,v), y(u,v))|J_T(u,v)|dudv.$$

Corolario 3.6.1.

$$\text{Área } (B) = \int\int_B 1 \cdot dxdy = \int\int_A |J_T(u,v)|dudv.$$

Ejemplo 3.6.1. Calcular $\int\int_B (x^2+y^2)dxdy$, siendo $B = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2-y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.
Proponemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} T : B &\longrightarrow A \\ (x,y) &\longrightarrow (u(x,y), v(x,y)) = (x^2-y^2, 2xy) \end{aligned}$$

siendo $A = [1,9] \times [4,8]$.
Es fácil observar que T es inyectiva y de clase C^1. Además,

$$J_T(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \neq 0 \text{ para los puntos del recinto.}$$

Luego

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_B (x^2+y^2)dxdy = \int\int_A f(u,v)|J_{T^{-1}}(u,v)|dudv \\ &= \textstyle\int\int_A (x^2(u,v)+y^2(u,v)) \dfrac{1}{4(x^2(u,v)+y^2(u,v))} dudv = \int\int_A \dfrac{1}{4} dudv \\ &= \dfrac{1}{4} \textstyle\int_1^9 (\int_4^8 dv)du = \dfrac{1}{4}\int_1^9 [v]_4^8 du = \dfrac{1}{4}\int_1^9 4du = [u]_1^9 = 8. \end{aligned}$$

Observación 3.6.1. Algunas veces el cambio de variables no es inyectivo en todo el dominio, como ocurre por ejemplo, en el caso de cambio a coordenadas polares. El teorema también se verifica en estas situaciones, siempre que el conjunto de puntos donde no se verifique la inyectividad sea la frontera del dominio, o un subconjunto de dicha frontera.

Coordenadas polares

En el plano el cambio de variables más usado es el de coordenadas polares:

$$\begin{aligned} T:(0,+\infty)\times(0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2-\{(x,0)\mid x\leq 0\} \\ (r,\theta) &\longrightarrow (x,y)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Las coordenadas polares no recubren la semirecta $\{(x,0)\mid x\leq 0\}$ sin embargo este es un conjunto de medida nula, por lo que no afecta para el cálculo de integrales.
El jacobiano de este cambio de coordenadas es

$$J_T(r,\theta)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=r.$$

Por lo tanto, si $B=T(A)$ tenemos

$$\int\int_B f(x,y)dxdy=\int\int_A f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot rdrd\theta.$$

Ejemplo 3.6.2. i) Cálculo del área del círculo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq R^2\}$:

$$\begin{aligned} \text{Área } (D) &= \int\int_D 1\cdot dxdy=\int\int_A rdrd\theta=\int_0^R(\int_0^{2\pi} rd\theta)dr \\ &= (\int_0^R rdr)\cdot(\int_0^{2\pi} d\theta)=[\tfrac{1}{2}r^2]_0^R\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}R^2 2\pi=\pi R^2. \end{aligned}$$

ii) Cálculo de la integral de la función $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ sobre el dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 2\leq x^2+y^2\leq 4, 0\leq x, 0\leq y\}$.

Aplicamos el cambio de variables sobre $A=[2,4]\times[0,\pi/2]$, obteniendo $f(x,y)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))=e^{r^2}$ y

$$\begin{aligned} \int\int_D fdxdy &= \int\int_A e^{r^2}rdrd\theta=(\int_2^4 e^{r^2}rdr)\cdot(\int_0^{\pi/2} d\theta)=[\tfrac{1}{2}e^{r^2}]_2^4\cdot[\theta]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{16}-e^4). \end{aligned}$$

3.6.1. Cambios de variables para integrales de tres variables

Todo el estudio acerca el cambio de variables realizado para funciones de dos variables se puede extender a tres o más variables.
Sea

$$\begin{aligned} T : A &\longrightarrow B \\ (u,v,w) &\longrightarrow (x,y,z) = T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \end{aligned}$$

un cambio de variables de clase C^1 como mínimo, entre dos abiertos acotados de $\mathbb{R}^3$.
El jacobiano de dicho cambio es

$$|J_T(u,v,w)| = \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}_{|(u,v,w)}.$$

En estas condiciones, si $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable se tiene que

$$\begin{aligned} &\int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz = \\ &\int\int\int_A f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J_T(u,v,w)| dudvdw. \end{aligned}$$

Los cambios de coordenadas más utilizados en $\mathbb{R}^3$ son las coordenadas cilíndricas y esféricas que no son más que una generalización de las coordenadas polares del plano.

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se definen de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} T : (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow B \\ (r,\theta,z) &\longrightarrow (x,y,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \end{aligned}$$

siendo $B = \mathbb{R}^3 - \{(x,0,z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$.
Es decir, si proyectamos (x,y,z) sobre el plano (x,y), las coordenadas (r,θ) son las coordenadas polares del plano $(x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta)$ y z nos da la altura del punto respecto el plano x,y.

El nombre "coordenadas cilíndricas" viene del hecho de que la gráfica de $r = k$ es un cilindro circular recto. Las coordenadas cilíndricas se utilizan con frecuencia en problemas físicos en los que se presenta una simetría cilíndrica es decir que tienen un eje de simetría.
Observamos que el conjunto de puntos para los cuales las coordenadas no están definidas es un semiplano, que es un conjunto de medida cero, por lo que no afecta para el cálculo de integrales.
El jacobiano de estas coordenadas es

$$J_T(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Por lo que

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_A f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r dr d\theta dz.$$

Ejemplo 3.6.3. i) Cálculo del volumen de un cilindro de base un disco de radio R y altura h.

El cilindro viene definido por la región $B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h\}$

Hacemos el cambio de coordenadas cilíndricas $T : A = (0,R] \times (0,2\pi) \times [0,h] \longrightarrow B - \{(x,0,z) \mid x \le 0, z \in [0.h]\}$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int\int\int_B dxdydz &= \textstyle\int\int\int_A drd\theta dz = \int_0^R(\int_0^{2\pi}(\int_0^h rdz)d\theta)dr \\ &= \textstyle(\int_0^R) \cdot (\int_0^{2\pi} d\theta) \cdot (\int_0^h dz) = [\frac{1}{2}r^2]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^h = \pi R^2 h. \end{aligned}$$

ii) Calcular $\int\int\int_B (x^2+y^2)dxdydz$ donde $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \le x \le 2, x^2+y^2 \le 4, x^2+y^2 \le z^2 \le 4\}$. Observamos que este recinto es tal que la proyección de B sobre el plano xy es el disco de centro el origen y radio 2:

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$. La superficie inferior de B es el cono $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 = 0\}$ y su superficie superior es el plano $z = 2$.

Esta región se puede describir de forma mucho más simple usando coordenadas cilíndricas: $A = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2\}$

por lo tanto la integral se puede escribir de la siguiente manera:

$\int\int\int_B f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_A f(r, \theta, z)drd\theta dz =$

$\int_0^{2\pi}(\int_0^2(\int_r^2 r^2 rdz)dr)d\theta = \int_0^{2\pi}(\int_0^2[r^3 z]_r^2 = \int_0^{2\pi}(\int_0^2(2r^3 - r^4)dr)d\theta =$

$\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\dfrac{8}{5}d\theta = [\frac{8}{5}]_0^{2\pi} = \dfrac{16\pi}{5}.$

Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas está basado sobre la misma idea que las coordenadas polares y se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia y dos ángulos, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\} \\ (r, \theta, \varphi) &\longrightarrow (r \cos\varphi \cos\theta, r \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, r \sin\varphi). \end{aligned}$$

En consecuencia, un punto p queda determinado por un conjunto de tres coordenadas que son

i) el radio $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ o distancia del punto al origen,

ii) la latitud $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ que es el ángulo que forma el vector (x, y, z) con su proyección sobre el plano xy.

iii) la longitud $\theta \in (0, 2\pi)$ que es el ángulo que forma la proyección $(x, y, 0)$ del punto sobre el plano xy con el eje x.

Observación 3.6.2. Algunos autores utilizan el ángulo polar o colatitud, en lugar de latitud, en cuyo caso su margen es de $(0, \pi)$. También puede variar la medida de la longitud, según se mida el ángulo en sentido de las agujas del reloj o contrario a las agujas reloj, y de 0 a 2π o de $-\pi$ a π.

El nombre de coordenadas esféricas queda claro si fijamos el valor de la variable r pues en dicho caso $T(r_0, \varphi, \theta)$ describe una esfera de radio r_0.
En cálculo integral las coordenadas esféricas suelen ser de utilidad cuando el recinto de integración presenta una simetría esférica, es decir presenta una simetría central.

El jacobiano de este cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} J_T(r,\varphi,\theta) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Observación 3.6.3. Puesto que $r > 0$ y $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene que $J_T(r,\varphi,\theta) > 0$.

Aplicando el teorema de cambio de variables para funciones de tres variables tenemos:

$$\int_B f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_B f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta, r\sin\varphi)r^2\cos\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 3.6.4. i) Cálculo del volumen de una esfera.

El dominio de integración es $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, que en coordenadas esféricas es $A = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leq r \leq R, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Volumen}\,(B) &= \textstyle\int\int\int_B 1\cdot dxdydz \\ &= \textstyle\int\int\int_A r^2\cos\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^R(\int_0^{2\pi}(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\varphi d\varphi)d\theta)dr \\ &= \textstyle(\int_0^R r^2dr)\cdot(\int_0^{2\pi} 1\cdot d\theta)\cdot(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi) \\ &= [\tfrac{r^3}{3}]_0^R\cdot[\theta]_0^{2\pi}\cdot[\operatorname{sen}\varphi]_{-\pi/2}^{-pi/2} = \dfrac{R^3}{3}2\pi 2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

ii) Calcular $\int\int\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, siendo B la bola de centro el origen y radio 1.

Tenemos que $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1$ que en coordenada polares es $A = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

$$\int\int\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz = \int\int\int_A e^{r^3} r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\int_0^1 e^{r^3} r^2 \cos\varphi dr) d\varphi) d\theta =$$
$$(\int_0^1 r^2 e^{r^3} dr) \cdot (\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi) \cdot (\int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta)$$
$$= [\tfrac{1}{3} e^{r^3}]_0^1 \cdot [\operatorname{sen}\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi(e-1).$$

PARTE III

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Introducción

En este capítulo se hace una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias. En lenguaje corriente una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la cual la incognita es una función de una variable de manera que ella junto con sus derivadas hasta un cierto orden (orden de la ecuación diferencial) verifican una cierta relación para todo valor de la variable independiente. Más concretamente

Definición 4.1.1. Una ecuación diferencial ordinaria que escribiremos (edo) es una ecuación en la que la incógnita es una función $y(x)$ y esta ecuación establece una relación entre algunas de les derivadas de $y(x)$, la propia función $y(x)$ y otras funciones conocidas de x.

Ejemplo 4.1.1.

$$y'(x) + e^x y(x) - 3 = 0,\ 4y'(x) + \cos x \cdot y(x) + x = 0,\ y''(x) - 2y'(x) + x = 0,$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias.

No siempre se escribe de forma explícita la dependencia de la función y y sus derivadas con la variable.

Ejemplo 4.1.2.

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \qquad r, K \text{ constantes positivas}$$

x es una función dependiente de la variable t, por lo que se podría escribir

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación logística* y refleja matemáticamente el comportamiento de la tasa de crecimiento de una población.

El orden de la derivada de mayor orden recibe el nombre de *orden* de la ecuación diferencial. Así en el ejemplo 4.1.1, las dos primeras ecuaciones son de primer orden y la segunda de segundo.
De forma genérica notaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$f(x, y, y') = 0.$$

Definición 4.1.2. Se dice que una función g definida en un intervalo I es solución de la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$ en este intervalo, si es de clase C^1 y verifica idénticamente la ecuación:

$$f(x, g, g') = 0.$$

Observación 4.1.1. Hay ecuaciones diferenciales ordinarias que no tienen ninguna solución, por ejemplo la ecuación $(y')^2 + 1 = 0$ y hay alguna que sólo tienen una, por ejemplo $(y'')^2 + y^2 = 0$. Obviamente hay ecuaciones que tienen infinitas soluciones así por ejemplo $y' - 2x = 0$ en que las funciones $y = x^2 + K$ para cada $K \in \mathbb{R}$ es solución.

Una familia de funciones dependiente de una parámetro $\varphi(x, y, K) = 0$, tal que para cada valor de K es una solución de la ecuación diferencial ordinaria $f(x, y, y') = 0$, se dice que es una *familia de soluciones*. Si esta familia contiene todas las soluciones diremos que es la solución general de la ecuación.

Observación 4.1.2. No siempre es fácil saber si una familia de soluciones de una ecuación diferencial es o no solución general.

Sería deseable tener siempre las soluciones en la forma $y = f(x)$ denominada explícita, es decir expresando y en función de x. Pero esto no siempre es posible por lo que consideramos también dos otras formas posibles: la forma paramétrica, y la forma implícita.

Ejemplo 4.1.3. i) La función $g(x;K) = Ke^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ es una familia de soluciones de la ecuación $y' = e^x - 2y$. Para comprobarlo determinamos g' y comprobamos si verifica la ecuación

$$g'(x) = -2Ke^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

$$\begin{aligned} g'(x) + 2g(x) &= -2Ke^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 2Ke^{-2x} + \frac{2}{3}e^x = \\ &= e^x \end{aligned}$$

luego, en efecto se verifica idénticamente la relación

$$g'(x) = e^x - 2g(x).$$

ii) La función $x(t) = te^t, y(t) = e^{-t}$ es una solución de la ecuación $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

En este caso la función posible solución de la ecuación viene dada en forma paramétrica

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \varphi(t) = te^t, \\ y(t) = \psi(t) = e^{-t} \end{array}\right\}$$

por lo que podemos escribir $y(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x)$.

Por lo que

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{-e^{-t}}{(t+1)e^t}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$(1 + te^te^{-t})\frac{-e^{-t}}{(t+1)e^t} + e^{-2t} = (1+t)\frac{-e^{-2t}}{(1+t)} + e^{-2t} = 0,$$

observamos que se verifica idénticamente.

iii) La función implícita $y^3 + x^2 - 4 = 0$ es solución de la ecuación $3y^2y' + 2x = 0$. Para comprobarlo basta derivar implícitamente la ecuación $y^3 + x^2 - 4 = 0$.

4.1.1. Ecuación diferencial de una familia de curvas

Dada una familia de curvas $f(x,y,K)=0$ (y función implícita de x, K parámetro) en el plano, nos planteamos saber si es la familia de soluciones de alguna ecuación diferencial. Para ello calculamos la derivada de $F(x)=f(x,y(x),K)$ y entre las ecuaciones

$$\begin{aligned} f(x,y,K)&=0\\ F'(x)&=0 \end{aligned}$$

eliminamos el parámetro K, obteniendo una relación entre x,y,y',

Observación 4.1.3. la ecuación $F'(x)=0$ es una relación entre x,y,y',K.

Si la familia de curvas depende de más de un parámetro derivaremos implícitamente la función f tantas veces como sea necesario por tal de que entre todas las relaciones obtenidas podamos eliminar todos los parámetros. Así por ejemplo, si la familia de curvas es $f(x,y,K_1,K_2)=0$, eliminaremos K_1 y K_2 de entre

$$\begin{aligned} f(x,y,K_1,K_2)&=0\\ F'(x)&=0\\ F''(x)&=0 \end{aligned}$$

obteniendo una relación entre x,y,y',y'', es decir una ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 4.1.4. La ecuación diferencial de la familia de curvas $f(x,y,K_1,K_2)=K_1e^{-x}+K_2x-y=0$ es

$$y-xy'-(1+x)y''=0,$$

ya que, calculando $F'(x)$ y $F''(x)$, ($F(x)=f(x,y(x),K_1,K_2)$):

$$\begin{aligned} F'(x)&=-K_1e^{-x}+K_2-y'=0,\\ F''(x)&=K_1e^{-x}-y''=0. \end{aligned}$$

Eliminamos K_1 y K_2 de entre

$$\begin{aligned} f(x,y,K_1,K_2)K_1e^{-x}+K_2x-y&=0\\ F'(x)=-K_1e^{-x}+K_2-y'&=0\\ F''(x)=K_1e^{-x}-y''&=0 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación tenemos $K_1 = e^x y''$, sustituyendo en la segunda tenemos $K_2 = y' - y''$ y finalmente sustituyendo los valores de K_1 y K_2 en la primera ecuación, obtenemos

$$y - xy' - (1+x)y'' = 0.$$

Trayectorias ortogonales

Definición 4.1.3. Una familia de curvas tal que cada uno de sus miembros corta perpendicularmente a todas las curvas de una familia dada, recibe el nombre de familia ortogonal o familia de trayectorias ortogonales.

Ejemplo 4.1.5. La ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales a $y = Ke^x$ es $y' = -\frac{1}{y}$.
Para determinarla hacemos lo siguiente. Determinamos la ecuación diferencial de esta familia de curvas:

$$y' = Ke^x,$$

por lo que $K = y'e^{-x}$ y $f(x, y, y') = y - y' = 0$.
La familia ortogonal a la familia dada será tal que su ecuación diferencial es

$$f(x, y, -\frac{1}{y'}),$$

luego

$$y - (-\frac{1}{y'}) = 0,$$

por lo que

$$y' = -\frac{1}{y}$$

es la ecuación diferencial buscada.
Resolviendo dicha ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned}
&ydy = -dx,\\
&\frac{1}{2}y^2 = -x + C,\\
&y^2 = -2x + 2C\\
&y^2 + 2x + k = 0
\end{aligned}$$

es la familia ortogonal a la dada.

4.2. Interpretación geométrica de las soluciones de una edo. Isoclinas

Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x, y)$, esta puede ser interpretada como una función f tal que a cada punto del plano (x_0, y_0) le asigna la pendiente de la solución y de la ecuación que pasa por (x_0, y_0). Es decir f nos da la inclinación en cada punto de las gráficas de las soluciones.
Nos podemos preguntar por los puntos del plano para los cuales las curvas solución de la ecuación tienen la misma pendiente:

$$f(x, y) = K$$

observamos que es la ecuación de una curva denominada *isoclina*.

Definición 4.2.1. La curva isoclina I_K de la ecuación $y' = f(x, y)$ es el lugar geométrico de los puntos del plano a los cuales f asigna una pendiente prefijada.

$$I_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = K\}.$$

Observación 4.2.1. a) La isoclina de pendiente K es la curva de nivel de $f(x, y)$ de altura K.

b) Las isoclinas no son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 4.2.1. Las isoclinas de

i) $y' = 2x - y$, son $2x - y = K$, (son rectas paralelas).

ii) $y' = y - x^2 + 2x - 2$ son $y - x^2 + 2x - 2 = K$, (son parábolas de eje vertical).

iii) $y' = x^2+4y^2$ son $x^2+4y^2 = K$, (para $K > 0$, son elipses concéntricas de semiejes $\sqrt{K}$ y $\dfrac{\sqrt{K}}{2}$), para $K = 0$ un punto, y para $K < 0$ no existen).

4.3. El problema de Cauchy

Un problema de Cauchy (también llamado problema de valor inicial) viene definido por una ecuación o sistema de ecuaciones de primer orden y una condición inicial:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

El problema de Cauchy, está referido al conjunto de datos iniciales que deben conocerse para determinar con unicidad la estructura de la solución de una ecuación diferencial ordinaria ó un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden.
De forma más general un problema de Cauchy para una ecuación diferencial de orden n viene dado por la ecuación y el valor de la función incógnita, y, y sus $n-1$ primeras derivadas, $y', y'', \ldots, y^{n-1}$, en un mismo punto inicial t_0.

Ejemplo 4.3.1. i) $y' = 5 \operatorname{sen} y - 4x^2$, $y(0) = 1$,

ii) $3y'' + 2y' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,
son problemas de Cauchy.

4.3.1. Existencia y unicidad de soluciones

Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice *Problema de Valor Inicial* al problema de hallar la solución (particular) de $f(x, y, y_0) = 0$ tal que $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son valores dados.

Teorema 4.3.1 (Existencia y unicidad de la solución). *Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = g(x)h(y)$ siendo $g : I_x \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $h : I_y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1, I_x e I_y son intervalos abiertos. Dados $(x_0, y_0) \in I_x \times I_y$ el problema de valor inicial definido por $y(x_0) = y_0$ siempre tiene una solución $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es algún intervalo abierto tal que $x_0 \in I \subset I_x$. Esta solución es única excepto para variaciones del intervalo I. Es decir: si $y_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra solución del mismo problema de valor inicial entonces $y_1(x) = y(x) \forall x \in I \cap I_1$.*

Observación 4.3.1. i) El teorema también es cierto para ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma $y' = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y)$ o de la forma $y_0 = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y) + g_3(x)h_3(y)$, etc. siendo g_i funciones continuas y las funciones h_i de clase C^1.

ii) También es cierto para ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma $y' = f(x, y)$ siendo f continua y de Lipschitz respecto la segunda variable.

iii) La condición de ser de clase C^1 es necesaria, para ello basta ver que para la ecuación $y' = \sqrt{|y|}$ no se tiene unicidad de solución para el problema de valor inicial con $y_0 = 0$. En este caso la función $h(y)$ no es de clase C^1.

Ejemplo 4.3.2. Supongamos que queremos ver si la familia $y(x) = Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$, es o no la solución general de $y' - y = 0$. Observamos que para resolver el problema de valor inicial $y(x_0) = y_0$ es suficiente tomar $K = y_0 e^{-x_0}$ $(y_0 e^{-x_0} e^{x_0} = y_0)$. Por lo tanto la familia contiene una solución de cualquier problema de valor inicial que nos planteemos. Puesto que toda solución es solución de algún problema de valor inicial y todo problema de valor inicial tiene una solución única, se puede concluir que la familia contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial.

4.4. Resolución de edos

No es fácil obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, Vamos a continuación a discutir algunos casos sencillos en los que se puede obtener la solución.

a) Ecuaciones de variable separada

Definición 4.4.1. Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de *variables separadas* si puede escribirse como

$$f(y)y' = g(x) \tag{4.1}$$

o en notación clásica

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

La solución general de la ecuación (4.1) puede obtenerse de forma ímplicita de la siguiente forma:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + K, K \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 4.4.1. Consideremos la ecuación $y' = -\dfrac{x^2}{(y+1)^4}$.
Esta ecuación puede expresarse de la forma

$$(y+1)^4 dy = -x^2 dx$$

por lo que

$$\frac{1}{5}(y+1)^5 = -\frac{1}{3}x^3 + K$$

b) Ecuaciones lineales

Definición 4.4.2. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se dice que es *lineal* si es de la forma

$$y' = f(x)y + g(x)$$

con f y g funciones continuas.

Si $g(x) = 0$ se dice que la ecuación diferencial es lineal homogénea, (observar que en este caso la ecuación es de variables separadas).
Dada una ecuación diferencial lineal $y' = f(x)y + g(x)$ llamaremos *ecuación homogénea asociada* a $y' = f(x)y$.
La solución general de la ecuación $y' = f(x)y + g(x)$ viene dada de la manera siguiente:

$$y(x) = Ke^{\int f(x)dx} + e^{\int f(x)dx} \int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Nota: $\int f(x)dx$ indica una primitiva cualquiera de la función $f(x)$, (no toda la familia de primitivas).

Ejemplo 4.4.2. Consideremos la ecuación lineal $y' = 3y + x$,
La solución general viene dada por

$$y(x) = Ke^{\int 3dx} + e^{\int 3dx} \int xe^{-\int 3dx}dx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Operando obtenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{3x}(K + \int xe^{-3x}) = e^{3x}(K - \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}) = \\ &= Ke^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

c) Ecuaciones de Bernouilli

Definición 4.4.3. Las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$y' = f(x)y + g(x)y^n \tag{4.2}$$

reciben el nombre de *ecuaciones de Bernouilli* de orden n.

Si $g(x) = 0$, o $n = 1$ la ecuación es de variables separadas, y si $n = 0$ la ecuación es lineal.
Una ecuación como (4.2), puede convertirse en lineal mediante el cambio de función $v = y^{1-n}$. En efecto $v' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$, escribiendo la ecuación de la forma

$$\frac{y'}{y^n} = f(x)\frac{1}{y^{n-1}} + g(x)$$

y aplicando el cambio obtenemos

$$v' = (1-n)f(x)v + (1-n)g(x),$$

que es en efecto lineal.

Ejemplo 4.4.3. Sea la ecuación $y' = y + xy^6$.
Esta ecuación es de Bernouilli de orden 6. El cambio de variable $v = y^{-5}$ la convierte en

$$v' = -5v - 5x = f(x)v + g(x),$$

cuya solución general es:

$$v(x) = Ke^{\int f(x)dx} + e^{\int f(x)dx}\int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$v(x) = Ke^{\int -5dx} + e^{\int -5dx}\int -5xe^{-\int -5dx}dx =$$
$$= e^{-5x}(K + \frac{1}{5}e^{5x} - xe^{5x}) = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x.$$

Deshaciendo el cambio tenemos

$$y^{-5} = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x.$$

Es fácil observar que la función $y = 0$ también es solución, por lo que el conjunto de soluciones es

$$\{y^{-5} = Ke^{-5x} + \frac{1}{5} - x\} \cup \{y = 0\}.$$

d) Ecuaciones de Ricatti

Definición 4.4.4. Las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2 \tag{4.3}$$

reciben el nombre de *ecuaciones de Ricatti*.

Observamos que si en (4.3), $f(x) = 0$, la ecuación es de Bernouilli, y si $h(x) = 0$ la ecuación es lineal.
Este tipo de ecuaciones no tiene método general de obtención de soluciones. Ahora bien, si conocemos una solución particular $y_1(x)$, de dicha ecuación, el cambio de función

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

la convierte en lineal.

Ejemplo 4.4.4. Es fácil comprobar que en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, la función $y = 1$ es una solución de la ecuación de Ricatti $y' = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1-2x}{x(x-1)}y - \dfrac{1}{x(x-1)}y^2$.
Para hallar una solución hacemos el cambio $y = 1 + \dfrac{1}{z}$.
Calculando

$$y' = -\frac{z'}{z^2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= \frac{2}{x-1} + \frac{1-2x}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{x(x-1)}\left(2x + (1-2x)\left(1+\frac{1}{z}\right) - \left(1+\frac{1}{z}\right)^2\right) = \\ &= -\frac{1+2x}{x(x-1)}\frac{1}{z} - \frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

por lo que

$$z' = \frac{1+2x}{x(x-1)}z + \frac{1}{x(x-1)},$$

que es lineal.

Resolvamos esta ecuación

$$z(x) = e^{\int \frac{1+2x}{x(x-1)}dx}\left(K + \int \frac{1}{x(x-1)} e^{-\int \frac{1+2x}{x(x-1)}dx}\right) =$$

$$= \left|\frac{(x-1)^3}{x}\right| \left(K + \int \frac{1}{x(x-1)} \frac{|x|}{|(x-1)^3|} dx\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} + \dfrac{1}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de función tenemos

$$\frac{1}{y-1} = \begin{cases} \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} + \dfrac{1}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{K(x-1)^3}{x} - \dfrac{1}{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

e) Ecuaciones homogéneas

Una $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *homogénea de grado* α si y sólo si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y).$$

Definición 4.4.5. Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ recibe el nombre de *homogénea* si y sólo si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero.

Dada una función homogénea $f(x, y)$ de grado cero, puede escribirse como función de una sola variable

$$f\left(\frac{y}{x}\right)$$

De hecho basta hacer $y = xz$:

$$f(x, y) = f(x, xz) = x^0 f(1, z) = f(1, z) \equiv f(z).$$

Proposición 4.4.1. *Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, es homogénea si y sólo si puede escribirse como $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.*

Haciendo el cambio de función $y = xz$, a la ecuación homogénea $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ésta se convierte en ecuación de variables separadas:

$$y' = z + xz'$$

por lo que

$$z + xz' = f(z)$$
$$\frac{1}{f(z) - z}dz = \frac{1}{z}dx$$

Obteniendo así, la solución en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = Ke^{\int \frac{1}{f(z)-z}dz} = K\varphi(z) \\ y = Kz\varphi(z) \end{array}\right\} K \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4.4.5. Consideremos la ecuación $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$.
Puesto que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, la función f es homogénea de grado cero, por tanto la ecuación diferencial es homogénea.
Hacemos el cambio $y = xz$, $y' = z + xz'$ por lo que tenemos

$$z + xz' = \frac{x^2z^2 + 2x^2z}{x^2 + 2x^2z} = \frac{x^2(z^2 + 2z)}{x^2(1 + 2z)} = \frac{z^2 + 2z}{1 + 2z},$$

ecuación de variables separadas:

$$f(z) - z = \frac{z^2 + 2z}{1 + 2z} - z = \frac{z - z^2}{1 + 2z}$$
$$\frac{1 + 2z}{z - z^2}dz = \frac{1}{x}dx$$
$$\left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z - 1}\right)dz = \frac{1}{x}dx$$

La solución de la ecuación expresada en forma paramétrica es:

$$\left.\begin{array}{r} |x| = K\frac{|z|}{|z-1|^3} \\ y = K\frac{z|z|}{|z-1|^3} \end{array}\right\} K \in \mathbb{R}^+$$

f) Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 4.4.6. Una ecuación diferencial del tipo

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0, \tag{4.4}$$

con f y g funciones de clase C^1 en un cierto abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, recibe el nombre de *exacta* si y sólo si existe una función $h(x,y)$ de clase C^2 en $\mathcal{U}$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = g \tag{4.5}$$

En tal caso las funciones implícitas $h(x,y) - K = 0$, $K \in \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación (4.4).

Proposición 4.4.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una ecuación del tipo* (4.4) *sea exacta es que*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

En tal caso la función

$$h(x,y) = \int f(x,y)dx + \varphi(y)$$

con

$$\varphi(y) = \int \left(g(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x,y)dx \right) dy,$$

verifica la condición (4.5) y por tanto las funciones implícitas

$$h(x,y) - K = 0, \ K \in \mathbb{R}$$

definen una familia de soluciones de (4.4).
Consideremos ahora una ecuación del tipo (4.4)

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0,$$

y supongamos que no es exacta. Si existe una función $\mu(x,y)$ de clase C^1 en $\mathcal{U}$ y tal que

$$\mu(x,y)f(x,y) + \mu(x,y)g(x,y)y' = 0, \tag{4.6}$$

es exacta, diremos que $\mu(x,y)$ es un *factor integrante*.
Observar que, si $\mu(x,y) \neq 0$, el conjunto de soluciones de la ecuación (4.4) y (4.6) es el mismo, por lo que podemos resolver esta última por el método anterior.
La ecuación
$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$
tiene un factor integrante $\varphi(x,y)$ dependiente sólo de x si y sólo si
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \mu(x)$$
es decir, sólo depende de la variable x y el factor integrante es
$$\varphi(x) = e^{\int \mu(x)dx}.$$
La ecuación
$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$
tiene un factor integrante $\varphi(x,y)$ dependiente sólo de y si y sólo si
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{-f} = \mu(y)$$
es decir, sólo depende de la variable y y el factor integrante es
$$\varphi(y) = e^{\int \mu(y)dy}.$$

Ejemplo 4.4.6. Consideremos la ecuación
$$(2x^3 + 3y) + (3x + y - 1)y' = 0.$$
Comprobemos que es exacta.
Las funciones $f(x,y) = 2x^3 + 3y$, $g(x,y) = 3x + y - 1$, son de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$.
$$\frac{\partial 2x^3 + 3y}{\partial y} = 3 \quad \frac{\partial 3x + y - 1}{\partial x} = 3,$$
por lo que la ecuación diferencial es exacta.

Busquemos la solución

$$h(x,y) = \int (2x^3+3y)dx + \varphi(y) = \frac{1}{2}x^4 + 3xy + \varphi(y),$$

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \int \left((3x+y-1) - \frac{\partial}{\partial y}\int (2x^3+3y)\right) dy = \\ &= \int (3x+y-1-3x) = \int (y-1)dy = \frac{1}{2}y^2 - y + K, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Luego la familia de soluciones es

$$h(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + 3xy + \frac{1}{2}y^2 - y + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.4.7. La ecuación diferencial $(x^2+y^2+x)+xyy' = 0$ no es exacta ya que

$$\frac{\partial x^2+y^2+x}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial xy}{\partial x} = y.$$

Sin embargo

$$\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g(x,y)} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} = \psi(x)$$

que sólo depende de x, por lo que

$$\varphi(x,y) = e^{\int \psi(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

es un factor integrante.

Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

5.1. Edo's y Sistemas de edo's lineales

Definición 5.1.1. Un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1' = \dfrac{dx_1}{dt} & = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \qquad \vdots & \\ x_n' = \dfrac{dx_n}{dt} & = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array} \right. \tag{5.1}$$

se denomina *sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden y dimensión* n. Las funciones $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ son continuas en un intervalo dado $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Si $b_i(t) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se dice que el sistema es *homogéneo*.
El sistema anterior lo podemos expresar en forma matricial

$$X' = A(t)X + B(t)$$

siendo

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Así pues $A(t)$ es un función a valores sobre el espacio de matrices $M_n(\mathbb{R})$ y $B(t)$ una función a valores $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} A(\cdot) : I &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\longrightarrow A(t), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(\cdot) : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow B(t). \end{aligned}$$

En el caso particular en que la matriz A sea constante decimos que el sistema es a coeficientes constantes

Ejemplo 5.1.1. i)

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\operatorname{sen} t)x + (\cos t)y + e^t \\ y' &= (\cos t)x - (\operatorname{sen} t)y + e^{2t} \end{aligned}\right\}$$

es un sistema lineal que escrito en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}80 \\ 0{,}05 & 0{,}20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema a coeficientes constantes,

iii)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= (\operatorname{sen} t)x + (\cos t)y \\ \dot{y} &= (\cos t)x - (\operatorname{sen} t)y \end{aligned}\right\}.$$

es un sistema homogéneo.

Observación 5.1.1. La linealidad se refiere a linealidad del sistema en la variable X, no respecto la variable t.

Definición 5.1.2. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es una ecuación de la forma

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \tag{5.2}$$

donde t es la variable independiente, $x = x(t)$ es la función incógnita, $a_0(t), \ldots, a_n(t)$ y $f(t)$ son funciones definidas en un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con a_n no indénticamente nula.

Observación 5.1.2. i) En el caso en que $f(t) = 0$ la ecuación se denomina homogénea,

ii) si las funciones $a_i(t)$ son constantes para cada $i = 1, \dots n$ la ecuación se dice que es a coeficientes constantes.

Ejemplo 5.1.2.
$$e^t x'' + e^{2t} x' + e^{3t} x = e^{4t}$$
es una edo lineal de orden 2.

Si $a_n(t) \neq 0$ en todo el dominio de definición podemos "normalizar"la ecuación quedando
$$x^{(n)} = -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} x - \frac{a_1(t)}{a_n(t)} x' - \dots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} x^{(n-1)} + \frac{f(t)}{a_n(t)} \tag{5.3}$$
Toda ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n del tipo (5.3) tiene asociada el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y dimensión n como el definido en (5.1).

Llamando
$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$
la ecuación (5.3) se escribe de la forma
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & \dots & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$
Ejemplo 5.1.3. La ecuación del ejemplo 5.1.2 se escribe de la forma
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{2t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$
El hecho de que las edo's lineales de orden n se puedan escribir como sistemas de edo's lineales de dimensión n nos permite poder utilizar para ecuaciones del tipo (5.2), las propiedades de los sistemas (5.1).

5.2. Soluciones de los sistemas de edo's lineales

Consideremos el sistema lineal de dimensión n,

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{5.4}$$

definido en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que las funciones $A(t)$ y $B(t)$ son continuas. En estas condiciones tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1 (Existencia y unicidad de soluciones). *Para cada $t_0 \in I$ y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el problema de valor inicial $X(t_0) = X_0$ para el sistema de edo's* (5.4) *tiene una única solución $X(t)$ definida para todo $t \in I$.*

5.2.1. Resolución de los sistemas homogéneos

Pasemos ahora a resolver los sistemas de edo's lineales, empezamos por los sistemas homogéneos.

Proposición 5.2.1. *El conjunto de soluciones de un sistema lineal de edo's de dimensión n homogéneo $X'(t) = A(t)X(t)$ es un espacio vectorial de dimensión n.*

Esto es, podemos expresar los elementos del espacio a partir de una base por lo que la solución general del sistema se puede conocer a partir de una base: si $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ son n soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones $X'(t) = A(t)X(t)$, entonces la solución general de $X'(t) = A(t)X(t)$ es de la forma

$$X(t) = C_1X_1(t) + \ldots + C_nX_n(t)$$

donde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.
El espacio vectorial (subespacio del espacio de todas las funciones) admite infinitas bases.

Definición 5.2.1. Cualquier base $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ del espacio vectorial de soluciones del sistema lineal de edo's homogéneo $X' = A(t)X$ recibe el nombre de conjunto fundamental (de soluciones) de dicho sistema.

Ejemplo 5.2.1. Consideremos el sistema lineal de edo's homogéneo de dimensión 2 siguiente

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2t & 4t-2 \\ 1-2t & 4t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Un conjunto fundamental de soluciones es

$$\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$$

Para comprobarlo, tenemos primero que probar que en efecto son soluciones

$$\begin{pmatrix} 2-2t & 4t-2 \\ 1-2t & 4t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{t^2} & 2e^t \\ 2te^{t^2} & e^t \end{pmatrix}.$$

Y a continuación comprobar que X_1 y X_2 son linealmente independientes, para ello calculamos el determinante de la matriz que forman

$$\det \begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix} = -e^{t^2+t} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Podemos caracterizar los conjuntos fundamentales de soluciones de la siguiente manera

Proposición 5.2.2. *Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ n soluciones cualesquiera del sistema homogéno $X' = A(t)X$. Estas soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones si y sólo si*

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Equivalentemente si y sólo si

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \textit{para algún } t_0 \in I.$$

Si la matrix Φ está formada por un conjunto fundamental de soluciones recibe el nombre de *matriz fundamental.*

5.2.2. Resolución de los sistemas caso general

Consideremos ahora un sistema general de la forma $X'(t) = A(t)X + B(t)$ con $B(t) \neq 0$.
Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos soluciones de dicho sistema de ecuaciones, es fácil observar que $X_1(t) - X_2(t)$ es una solución del sistema de ecuaciones homogéneo $X' = A(t)X$.
Por otra parte, también si tenemos una solución $X_1(t)$ del sistema de ecuaciones y una solución $X_h(t)$ del sistema de ecuaciones homogéneo $X' = A(t)X$ entonces $X_1(t) + X_h(t)$ es también una solución de la ecuación dada.

Observación 5.2.1. i) El sistema de ecuaciones $X' = A(t)X$ recibe el nombre de sistema de ecuaciones homogéneo asociado al sistema de ecuaciones general

ii) Cada una de las soluciones del sistema de ecuaciones reciben el nombre de soluciones particulares, y las notaremos por $X_p(t)$.

Con esto tenemos que el conjunto de soluciones es una variedad lienal que pasa por una solución particular y tiene como subespacio director el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo asociado. Más concretamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.2.2. *Sea X_p una solución particular de $X' = A(t)X + B(t)$ y $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado. Entonces, la solución general del sistema viene dada por*

$$X(t) = X_p(t) + C_1X_1(t) + \ldots + C_nX_n(t).$$

donde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.

5.2.3. Método de variación de las constantes

Una vez conocido un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado $X' = A(t)X$ del sistema completo $X' = A(t)X + B(t)$ podemos deducir una solución particular de dicho sistema mediante el método conocido como de variación de constantes.

Proposición 5.2.3 (Método de variación de constantes)**.** *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de soluciones de $X' = A(t)X$. Entonces*

$$X(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt$$

es una solución (particular) del sistema completo $X' = A(t)X + B(t)$.

Observación 5.2.2. $\int \Phi^{-1}(t)B(t)dt$ es una primitiva cualquiera.

Ejemplo 5.2.2. 5.2.1 Consideremos el sistema lineal de edo's completo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2t & 4t-2 \\ 1-2t & 4t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

cuyo sistema homogéneo asociado es el considerado en el ejemplo 5.2.1. Una matriz fundamental de soluciones es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix}$$

Por lo que una solución particular del sistema es

$$X(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix} \int -\frac{1}{e^{t^2+t}} \begin{pmatrix} e^t & -2e^t \\ -e^{t^2} & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} dt =$$
$$\begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} te^{-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 2e^t \\ e^{t^2} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Para cada par de constantes de integración tenemos una solución particular, podemos tomar $c_1 = c_2 = 0$ y obtenemos la solución particular

$$X_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.3. Soluciones de las edo's lineales de orden n

Consideremos ahora la ecuación diferencial lineal de orden n

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \tag{5.5}$$

donde $a_0(t), \ldots, a_n(t)$ y $f(t)$ son funciones continuas para todo $t \in I$ y $a_n(t) \neq 0$ en dicho intervalo.

Teorema 5.3.1 (Existencia y unicidad de soluciones)**.** *Para todo $t \in I$, y para todo $(x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0', \ldots,$ $x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ tiene una única solución $x(t)$ definida para todo $t \in I$.*

5.3.1. Resolución de las edo's homogéneas

Supongamos ahora que la función $f(t)$ en (5.5) es idénticamente nula en el intervalo de definición de la ecuación. En dicho caso la ecuación recibe el nombre de *homogénea*.

Teorema 5.3.2. *El conjunto de soluciones de una edo lineal de orden n homogénea es un subespacio vectorial del espacio de funciones de dimensión n.*

Corolario 5.3.1. Sea $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ un conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea. Entonces la solución general de dicha ecuación es de la forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t)$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.

Un conjunto de n soluciones $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea, recibe el nombre de *conjunto fundamental de soluciones*.
Los conjuntos fundamentales de soluciones se pueden caracterizar de la siguiente manera.

Definición 5.3.1. Sean $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, n soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea $a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0 x = 0$, con $a_i(t)$ continuas en I t $a_n(t) \neq 0$ en I. Definimos el Wronskiano $W(t)$ de $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ como

$$W(t) = \det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

y tenemos el siguiente resultado

Proposición 5.3.1. *El conjunto de soluciones $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, de la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea $a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0 x = 0$, (con $a_i(t)$ continuas en I t $a_n(t) \neq 0$ en I) es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación si y sólo si*

$$W(t) = \det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Equivalentemente

$$W(t) = \det \Phi \neq 0 \quad \textit{para algún } t_0 \in I.$$

Observación 5.3.1. Si $W(t) \neq 0$ entonces $\Phi(t)$ una matriz fundamental de soluciones del sistema de edo's lineal de orden n homogéneo asociado a la ecuación.

Ejemplo 5.3.1. Consideremos la ecuación lineal homogénea de orden 2 $x^{(2)} + 2x' + x = 0$. El conjunto $x_1(t) = e^{-t}$, $x_2(t) = te^{-t}$ es un conjunto fundamental de soluciones.
Para comprobarlo, primero observamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones

i) $x_1'(t) = -e^{-t}$, $x^{(2)}(t) = e^{-t}$, luego $e^{-t} - 2e^{-t} + e^{-t} = 0$,

ii) $x_2'(t) = e^{-t} - te^{-t}$, $x^{(2)}(t) = -2e^{-t} + te^{-t}$, luego $-2e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} - te^{-t} + e^{-t} = 0$,

Calculemos ahora el Wronskiano:

$$\det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} = e^{-2t} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

5.3.2. Reducción del orden

No es fácil encontrar un conjunto de soluciones independiente de una ecuación lineal homogénea de orden n a menos que todas las funciones coeficientes $a_i(t)$ sean constantes en cuyo caso el Álgebra lineal nos proporciona un método de obtención de soluciones (ver por ejemplo [5]).
Vamos a ver ahora como si conocemos una solución no nula de la ecuación podemos deducir una de independiente.

Proposición 5.3.2 (Método de reducción del orden)**.** *Sea $x_1(t)$ una solución no nula de la ecuación $x^{(2)} + p(t)x' + q(t)x = 0$. Entonces*

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1(t)^2} dt$$

es una solución linealmente independiente de $x_1(t)$

Observación 5.3.2. El nombre de reducción del orden viene del hecho de que conocida $x_1(t)$ la solución $x_2(t)$ se obtiene resolviendo una ecuación de primer orden.
Dada una ecuación diferencial $x^{(2)} + p(t)x' + q(t)x = 0$ y $x_1(t)$ una solución, y sea la segunda solución definida por $x_2(t) = v(t)x_1(t)$ donde $v(t)$ es una función arbitraria. Así,

$$x_2'(t) = v'(t)x_1(t) + v(t)x_1'(t)$$

y

$$x^{(2)}(t) = v^{(2)}(t)x_1(t) + 2v'(t)x_1'(t) + v(t)x^{(2)}(t)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta que x_1 es solución, se obtiene

$$v^{(2)}(t) + \left(\frac{2x_1'(t)}{x_1(t)} + p(t)\right) v' = 0.$$

Llamando $v' = w$ entonces $v^{(2)} = w'$ por lo que tenemos una ecuación lineal cuya solución es

$$w(t) = C_1 \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int p(t)dt}.$$

Ejemplo 5.3.2. Supongamos la ecuación $x^{(2)} + \frac{2}{t}x' - \frac{2}{t^2}x = 0$, es fácil comprobar que una solución es $x_1(t) = t$. Una segunda solución es

$$x_2(t) = t \int \frac{e^{-\int \frac{2}{t}dt}}{t^2} dt = t \int \frac{e^{-2\ln t}}{t^2} dt = -\frac{1}{3}t^{-2}.$$

5.3.3. Resolución del caso no homogéneo

Consideremos ahora la ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea

$$a_n(t)x^{(n)} + \ldots + a_1(t)x + a_0(t)x = f(t). \tag{5.6}$$

Proposición 5.3.3. *Sea $x_p(t)$ una solución particular de la ecuación* (5.6). *Si $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada, entonces*

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t).$$

Para la obtención de soluciones particulares podemos usar el método de variación de constantes.

Proposición 5.3.4. *Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de $x^{(2)}+p(t)x'+q(t)x=0$ y sea $W(t)$ su Wronskiano. Consideremos las funciones*

$$u_1 = -\int \frac{x_2(t)\cdot f(t)}{W(t)}dt, \quad u_2 = \int \frac{x_1(t)\cdot f(t)}{W(t)}dt,$$

entonces $x_p(t)=u_1(t)x_1(t)+u_2(t)x_2(t)$ es una solución particular de la ecuación $x^{(2)}+p(t)x'+q(t)x=f(t)$.

Ejemplo 5.3.3. Una solución particular de la ecuación $x^{(2)}-2\frac{1+t}{t}x'+\frac{t+2}{t}x=2\frac{e^t}{t}$ sabiendo que $x_1(t)=e^t$ y $x_2(t)=t^3e^t$ es $u_1(t)x_1(t)+u_2(t)x_2(t)$ con

$$u_1(t) = -\int \frac{t^3e^t\cdot 2\frac{e^t}{t}}{3t^2e^{2t}}dt = -\frac{2}{3}t+c_1$$

$$u_2(t) = \int \frac{e^t\cdot 2\frac{e^t}{t}}{3t^2e^{2t}}dt = -\frac{t^{-2}}{3}+c_2.$$

Podemos tomar $c_1=c_2=0$, teniendo así la solución particular $x_p=-te^t$ y la solución general de la ecuación

$$x(t) = -te^t + C_1e^t + C_2t^3e^t.$$

Bibliografía

[1] C. Bonet, A. Compta, N. Consul, M. Ollé, P. Pascual, A. Roig, *Càlcul integral per a enginyers*. Edicions UPC, 2002.

[2] R.L. Borrelli, C.S. Coleman. *Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelacin*. Oxford University Press, 2002.

[3] J. de Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables*. McGraw-Hill, 2008.

[4] J. Clotet, J. Ferrer, Mª I. García, *Càlcul Diferencial d'una i diverses variables. Problemes resolts*. Edicions UPC (2000),

[5] Mª I. García Planas, *Álgebra Lineal. Problemas resueltos*. Edicions UPC (1993).

[6] M. I. García, *Álgebra lineal y geometría para la ingeniería*. (2011).

[7] J. Marsden y Anthony J. Tromba, *Cálculo vectorial*. Addison Wesley Iberoamericana, 2004.

[8] R. Larson, B.H. Edwards. *Cálculo de varias variables*. McGraw-Hill, 2010.

[9] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Paraninfo, 2009.